Notas de Razonamiento Matemático
(versión incompleta - bajo revisión)

Versión 0.94: Noviembre 15, 2009

Luis A. Lomelí
Marisela Castillo
Jorge Herrera
Enrique Comer
con Arturo Gamietea

Instituto Tecnológico de Tijuana

Documento de apoyo para estudiantes y maestros del semestre cero o propedéutico en el Instituto Tecnológico de Tijuana.

Índice

Introducción

1. Pensamiento Matemático

Pensar matemáticamente es un atributo cada vez más importante para los profesionales de todas las carreras. John Mason [2] nos presenta la necesidad de crear y mantener una atmósfera apropiada para desarrollarlo:

> Ningún pensamiento ocurre en el vacío. La atmósfera cognitiva y emocional afecta tu pensamiento, estés consciente de ello o no. Para ser un pensador matemático efectivo necesitas confianza para intentar tus nuevas ideas y tratar sensiblemente con tus estados emocionales. La base de la confianza descanza en experimentar el poder de tu pensamiento para incrementar tu comprensión. Solamente la experiencia personal reflexiva, puede lograr esto[1].

Esta reflexión es precisamente la que se busca desarrollar en algunas de las estrategias actuales de aprendizaje basado en competencias (p. ej. el portafolio), como se verá en la sección 1.2.

La atmósfera requerida para desarrollar el pensamiento matemático requiere de tres procesos básicos: (1) indagación o cuestionamiento, (2) enfrentar desafíos y (3) reflexionar. La persona que se desarrolla intelectual y emocionalmente en dicha atmósfera, requiere una actitud de poder hacer[2]:, una actitud que dice:

- *Puedo Cuestionar*: Identificar situaciones o problemas a investigar, identificar mis hipótesis, negociar el significado de los términos
- *Puedo aceptar desafíos*: hacer conjeturas, buscar argumentos que las justifiquen o las invaliden, revisar, modificar, alterar
- *Puedo reflexionar*: ser autocrítico, esperar y evaluar diferentes enfoques, hacer ajustes, re-negociar, cambiar de dirección

A diferencia de lo que se percibe en ocasiones al leer un libro de texto de matemáticas, donde a cada paso se avanza de manera segura y bien argumentada, la creación de las matemáticas y la solución de problemas propios

[1] Ver [2]p. 152
[2] Ver [2]p. 153

de esta materia, no avanzan de manera secuencial y única, sino que lo hacen en base a exploraciones e intuiciones que posteriormente cristalizan en una solución elegante o al menos bien estructurada y justificada donde cada símbolo que se escribe contribuye directamente a la solución. Dichas intuiciones sólo se desarrollan con la interacción dedicada e intensional del aprendedor con los objetos y procesos matemáticos, desde los más sencillos y concretos, hasta los más complejos y abstractos. (+)

1.1. Cultura matemática

Actualmente disfrutamos de una gran riqueza matemática. Tanto las matemáticas llamadas puras (p. ej. teoría de números y álgebra abstracta) como las matemáticas aplicadas (p. ej. métodos numéricos, física-matemática) se han desarrollado gracias a una cultura propia que promueve sobre todo el descubrimiento de proposiciones verdaderas y su demostración. Alan J. Bishop [1]describe de manera sucinta, los componentes[3] de dicha cultura. La siguiente Tabla enfatiza los valores de cada componente:

Componente	*valores*
simbólico	racionalidad y objetismo (reificación)
social	control (predicción) y progreso
cultural	apertura y misterio

Tabla 1: Componentes de la cultura matemática y sus valores

(+)

1.2. Competencias matemáticas

Las competencias en Matemáticas son muy generales, y como se mencionó en la sección anterior a lo largo de la carrera se deben de ir adquiriendo y reforzando. Específicamente para el curso de cálculo se requieren conocimientos muy concretos; una buena referencia Web es: Página de competencias de preparación para cálculo de la Universidad Simon Fraser de Canadá.

Para el curso del Semestre Cero se establecieron 12 competencias, con las cuales se cubren varias de las 110 que recomienda la SFU de Canadá y

[3]ver [1] p.131

las demás el alumno puede obtenerlas o reforzarlas utilizando las habilidades que ha desarrollado a lo largo del Semestre 0. A continuación se presentan las Comptencias de Curso de Razonamiento Matemático.

El alumno que cursa el Semestre Cero:

1. Es responsable de su aprendizaje.
2. Está dispuesto a enfrentar retos matemáticos.
3. Utiliza (adecuadamente / formalmente) los números reales.
4. Realiza operaciones con fracciones.
5. Factoriza expresiones algebraicas.
6. Utiliza adecuadamente la Sintaxis y Semántica de las expresiones.
7. Utiliza las propiedades de la igualdad para resolver ecuaciones.
8. Justifica sus procedimientos.
9. Aplica el Teorema de Pitágoras.
10. Conoce, relaciona y aplica el Círculo Trigonométrico.
11. Reconoce y realiza la Gráfica de funciones básicas.
12. Resuelve Problemas.

Estas 12 competencias se van adquiriendo y reforzando mediante la práctica en cada uno de los temas del curso a través del semestre y sirven como base para poder adquirir la preparación necesaria en Matemáticas para ingresar al primer semestre de una carrera de Ingeniería.

1.3. Fluidez y grado de dificultad de los problemas

El desempeño y desarrollo intelectual dependen en gran medida del grado de dificultad de los problemas a que nos enfrentamos. Según propuso el Dr. Mihaly Csikszentmihalyi, existe una zona de fluidez en el cuadrante Capacidades .vs. Retos de forma tal que si una persona enfrenta regularmente retos a la medida de sus capacidades, entonces dicha persona tiene un mejor desarrollo y a la vez obtiene una mayor satisfacción, que una persona que se enfrenta a retos menores ya sea menores o mayores a sus capacidades. Este concepto aplicado al área de educación matemática ha sido estudiado por Gaye Williams. Para mayor información (por el momento) recomendamos visitar la página de Aprendizaje, Fluir y Felicidad en el proyecto Cemati. (+)

1.4. Escritura y visualización matemática

1.4.1. Errores comunes al escribir matemáticas

1.4.2. Graficación

Entendemos por graficar dentro del contexto de las matemáticas la acción de representar en el plano (dos dimensiones), o en el espacio (tres dimensiones) un conjunto de parejas o tripletas ordenadas de valores.

Estas representaciones en general obedecen a reglas que se definen con el concepto de función, mismo que se explica en temas posteriores.

En este punto lo que nos interesa es comprender el concepto de gráfica y por ende el de graficar.

Un ejemplo de una gráfica es una recta, que en su caso más simple corresponde ya sea a la recta horizontal $y = c$ o la recta vertical $x = c$.

¿Cómo podemos entonces entender lo mencionado anteriormiente?

Para contestar esta pregunta podemos hacer uso de algunas herramientas de cómputo, que nos permiten visualizar lo que las expresiones anteriores significan.

En la siguiente sección presentamos una excelente herramienta que usaremos con frecuencia.

1.4.3. GeoGebra

GeoGebra es un software matemático que nos ayuda a obtener entre otras cosas, gráficas de funciones. Lo primero que tenemos que hacer es *instalarlo* en nuestra computadora. Para esto es necesario ir al sitio GeoGebra. En este sitio se cuenta con dos opciones: una que hace referencia a un programa instalador que se ubica en el sitio denominado WebStar, la otra que es la recomendada, descarga el archivo de instalación, que al terminar de descargarse se ejecuta con doble click, se siguen las instrucciones por omisión sugeridas y listo.

Una vez terminada la instalación nos encontramos con la siguiente ventana que muestra la pantalla de inicio.

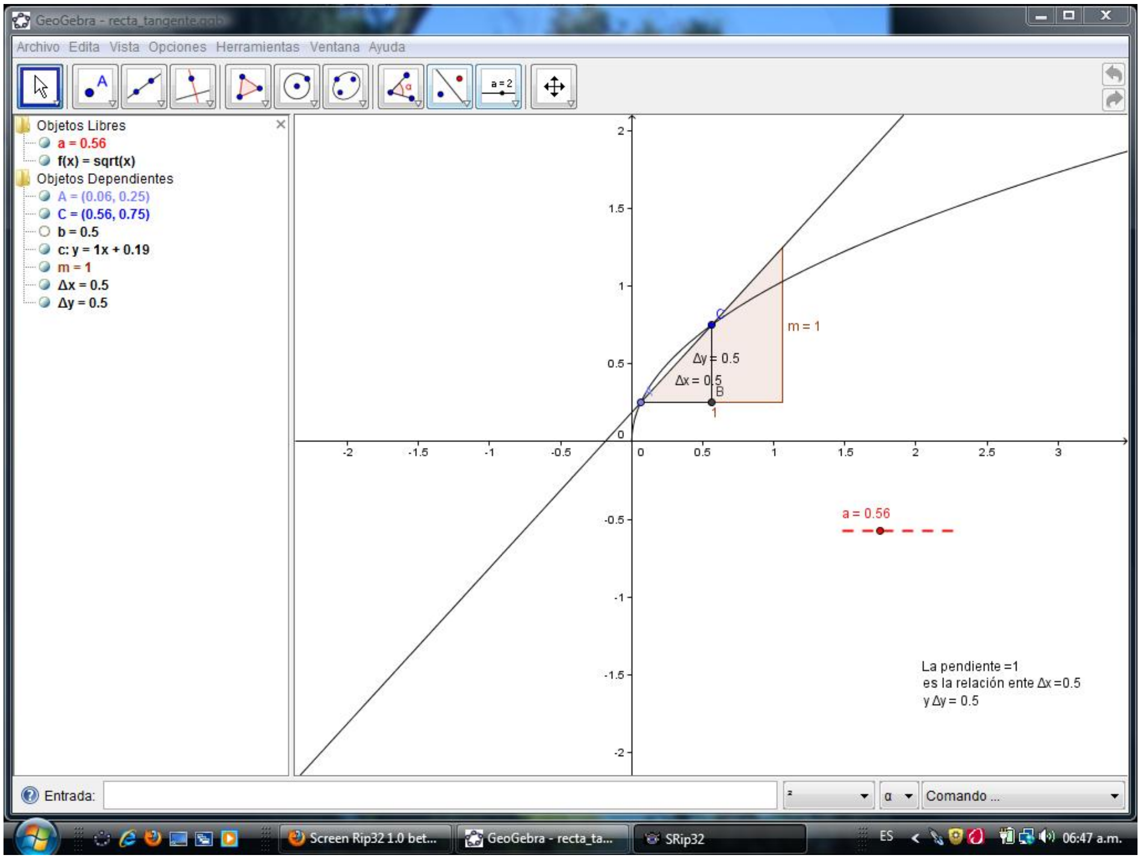


Figure 1: Ventana Principal

Esta pantalla consta de cuatro regiones.

Una corresponde a la del Menu Principal con las siguientes opciones: Archivo, Edita, Vista, etc.

Figure 2: Menú

El área de trabajo se divide en dos ventanas: la *gráfica*, que es la ventana en donde se representan los distintos objetos (puntos, rectas, circunferencias, etc) introducidos en el campo de entrada. Ver la siguiente figura.

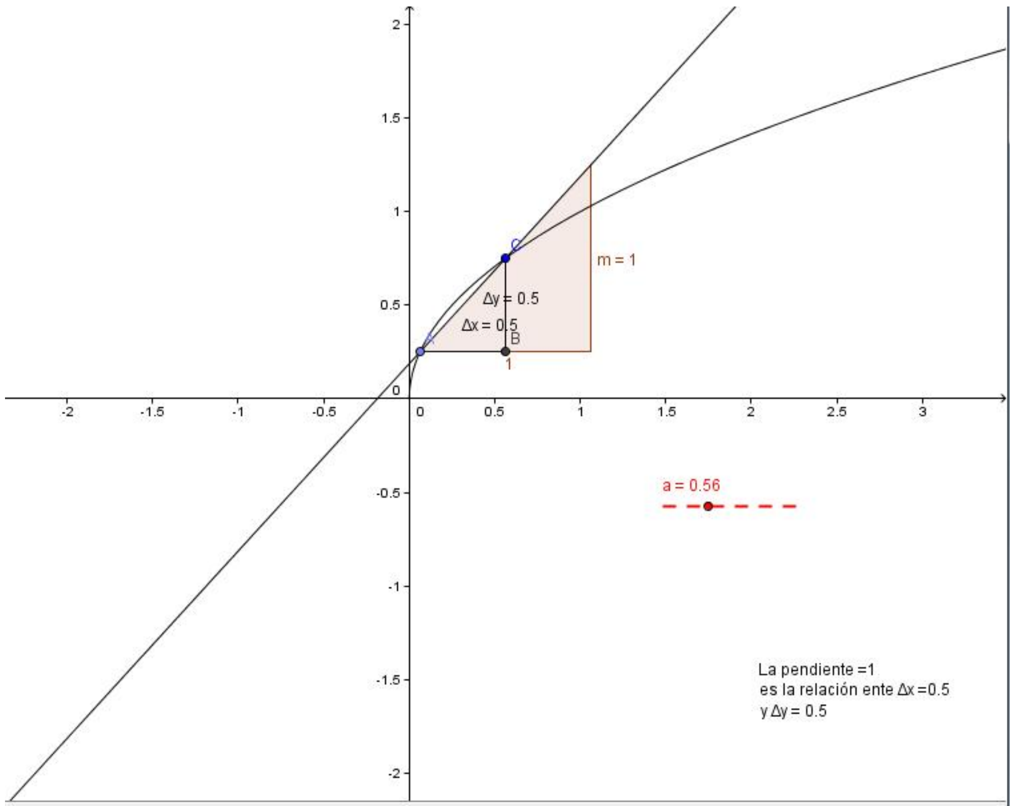


Figure 3: Ventana gráfica

y la *algebraica*. Donde queda el registro de los objetos pero algebraicamente. Es decir si se grafica una recta, en la ventana algebraica se observa su ecuación. Veamos el caso de las figuras. Se observa una función raíz $y = \sqrt{(x)}$, dos puntos en ella A y C. Por estos puntos se hace pasar una recta secante.

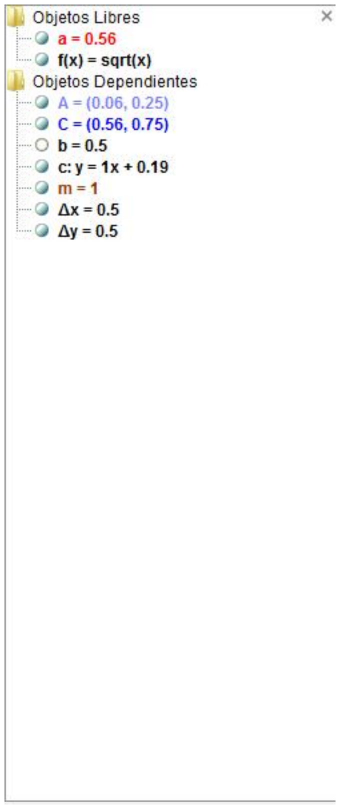


Figura 4: Ventana algebraica

En la ventana algebraica se observa la función y las coordenadas del punto A y B. Además de otros elementos que en este ejemplo están incluidos.

En la parte inferior encontramos el campo de entradas, en él, se escriben los comandos que el programa interpreta y los despliega en la ventana de trabajo o gráfica.

Figure 5: Ventana de entradas

Para mayor información puede descargar el archivo Introducción a GeoGebra.

2. Números Reales

En cualquier carrera de ingeniería es fundamental el conocimiento de las propiedades algebraicas y el manejo adecuado de las expresiones. La base de los conceptos algebraicos son los números reales y debemos establecer clara y formalmente los conceptos básicos.

Si no se entienden las propiedades básicas perfectamente se va a tener problemas. Lo ideal es tener las propiedades escritas (en una cartulina o a la derecha del pizarrón) y en cada paso indicar qué propiedad se está utilizando mientras el alumno se familiariza con ellas.

Pero: ¿Cuántas propiedades hay?, ¿cuáles son las más importantes?, ¿cuáles son las que debo de tener escritas? O con ¿cuántas es suficiente para tener éxito en el curso de matemáticas y los demás en una carrera de Ingeniería?

En esta unidad se pretende dar respuesta a esta pregunta y sentar las bases de lo que será el conocimiento matemático para los cursos de una carrera en el Instituto Tecnológico de Tijuana.

2.1. Propiedades Básicas

Primeramente leeremos el cuento: El Dilema del Mosquetero.

Una de las novelas más famosas de la Literatura Universal es: Los tres Mosqueteros de Alexandre Dumas. Es la historia de un joven habitante de la Gascuña que sabía utilizar muy bien la espada. Como su padre conocía a Mesieur de Tréville Capitán de los Mosqueteros del Rey llegó con una carta de recomendación pues su mayor deseo era volverse mosquetero.

Al salir de ver a Mesieur de Tréville tenía mucha prisa porque vio al hombre misterioso que le robó la carta y por su arrebato le pegó en el hombro a Athos, éste lo retó a duelo a Mediodía junto al Convento de los Carmelitas Descalzos, siguiendo con su prisa se enredó con la capa Porthos y quedaron de batirse a la 1:00 atrás del Luxemburgo, finalmente recogió un pañuelo de una Dama que estaba pisando Aramis y obtuvo su tercer duelo a las 2:00.

Al enfrentar sus compromisos de honor tuvo el siguiente dilema, si podría enfrentar a los tres o solamente a uno, incluso se disculpó con los otros dos pues les dijo, es posible que no cumpla mi compromiso con ustedes porque puedo ser herido; pero haré lo posible, tratando de terminar pronto con los dos primeros para poder cumplir con Aramis que era el tercero.

Al empezar el duelo con Athos, llegaron los Guardias del Cardenal y dijeron, quedan arrestados pues están prohibidos los duelos, los tres mosqueteros le dijeron a D'Artagnan, puedes retirarte porque esta es una disputa entre los Guardias y nosotros, pero D'Artagnan les dijo me parece injusto que seáis solamente tres contra siete y se unió a ellos y vencieron a los guardias.

A partir de ese momento D'Artagnan, y los tres mosqueteros Athos, Porthos y Aramis fueron inseparables y el libro narra las fascinantes aventuras, que continúan en la novela del Hombre con la Máscara de Hierro y en la de Veinte Años Después.

En base a este cuento y tomando la experiencia de varios maestros del Tecnológico, se llegó a formular una manera de estructurar las propiedades algebraicas con el fin de facilitar su manejo, su aprendizaje y sobretodo el aspecto formal.

Propiedades Básicas de los Números Reales:

Propiedad	Enunciado Formal	Forma Reducida
Cerradura de la Suma	$x, y \epsilon R \Rightarrow x + y \epsilon R$	+ es Operación Binaria
Cerradura de la Multiplicación	$x, y \epsilon R \Rightarrow x * y \epsilon R$	* es Operación Binaria
Asociativa de la Suma	$a + (b + c) = (a + b) + c$	Reacomodo
Conmutativa de la Suma	$a + b = b + a$	Reacomodo
Conmutativa de la Multiplicación	$a * b = b * a$	Reacomodo
Elemento Inverso Aditivo	$a + (-a) = 0$	Cancelación
Elemento Neutro Aditivo	$a + 0 = a$	Cancelación
Elemento Inverso Multiplicativo	$a * (a^{-1}) = 0$	Cancelación
Elemento Neutro Multiplicativo	$a * 1 = a$	Cancelación
Asociativa de la Multiplicación	$a * (b * c) = (a * b) * c$	Dilema del Mosquetero
Distributiva	$a * (b + c) = a * b + a * c$	Dilema del Mosquetero

Ejemplos.

Utilizando las propiedades simplifique las siguientes expresiones:

Ejercicio 1: $x(y+z+w)$

Ejercicio 2: $(a+b)(c+d)$

Ejercicio 3: $(a+b)^2$

Ejemplo 4: $(7x-3y)^2$

Ejercicio 5: $(a+b)^3$

Ejercicio 6: $(7a-2b)(a^2-5ab+2b^2)$

Ejercicio 7: $5(3x-y)+5(x+5y)-4(2x+y)$

Ejercicio 8: $(a-7b)(5a+b)(2a-4b)$

Ejercicio 9: $(2a+b(4a+b)-3a(2a+1)+3(7a+6b))$

Ejercicio 10:$(-5x+4y)(6x-y)$

Ejercicio 11: $(a^2-7ab+8b^2)-(15a^2+2ab-b^2)$

Ejercicio 12:$(x+2y)(x^2-xy+5y^2)-2x(x^2-5xy+3y^2)$

Ejercicio 13: $(m^2-m(4m+2n)+n(5-n(m+1))-(7m^2+mn-3n^2))$

Ejercicio 14: $(a-2b+5c)(6a+b+9c)$

Ejercicio 15:$(a+7b)^2-(6a-b)^3$

2.2. Sintáxis y semántica

En matemáticas como en cualquier lenguaje hay dos elementos centrales que se deben tomar en cuenta para poder entender correctamente los conceptos y los procedimientos. El primero es la Sintaxis y el segundo la Semántica.

Explicado de una manera simple la sintaxis es la forma como se escribe y la semántica su significado.

Por ejemplo, analicemos la palabra TUNA.

La sintaxis es la secuencia de las cuatro letras en orden, pero su semántica puede variar. Por ejemplo en español es el fruto del nopal y en inglés es un pescado.

Otro ejemplo. Consideremos TRES y 3. Aquí tenemos dos formas distintas de escribir el número. ¿Qué quiere decir esto?, que tenemos diferente sintaxis pero la misma semántica.

En matemáticas es muy importante la sintaxis (la forma como se escribe) porque un cambio pequeño puede hacer que varíe la semántica. Por ejemplo: $senx^2$ comparado con sen^2x.

En la primera expresión primero debemos elevar la variable x al cuadrado y después calcular la función seno. En cambio en la segunda expresión, primero se aplica la función seno y después se eleva al cuadrado.

En otras palabras la segunda expresión es equivalente (tiene la misma semántica) que $(senx)^2$

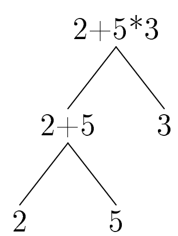
Hay que ser muy cuidadosos, sobretodo con los paréntesis, es muy común quitar paréntesis que no se necesitan, pero hay que estar seguros de que al cambiar la sintaxis quitando paréntesis la semántica es la misma. Si en el ejemplo anterior, a la expresión $(senx)^2$ le quitamos los paréntesis, podríamos dejar la expresión $senx^2$, que como ya mencionamos es otra cosa.

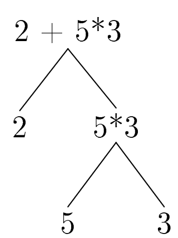
¿Cómo aprender correctamente la sintaxis en matemáticas?

Analicemos la expresión: $2 + 5 * 3$

Lo que sucede es que las expresiones algebraicas utilizan los operadores binarios +, −, *, /; los cuales se llaman binarios porque representan operaciones entre dos elementos. Si queremos utilizar 3, debemos usar paréntesis. Así 2 + 5 * 3 puede ser (2+5)*3 ó 2+(5*3). El paréntesis indica que operación debe ser primero.

Las dos formas las podríamos representar mediante árboles sintácticos:





En el caso de 2 + 5 * 3 los dos resultados están bien. La calculadora sencilla toma el orden de escritura y se obtiene 21 (Primer Árbol), la calculadora científica, en cambio, utiliza la jerarquía algebraica de operadores y obtiene 17 (Segundo Árbol).

Jerarquía de Operadores:

No es necesario utilizar paréntesis cuando el orden en que se deben efectuar las operaciones cumple con la siguiente jerarquía:

1º. Operadores unitarios y funciones como: Potencia Raíz seno, coseno, ... logarítmica, exponencial, etc.

2º. Multiplicaciones y divisiones.

3º. Sumas y restas.

Nota: Los paréntesis alteran la jerarquía de los operadores, o sea que las operaciones entre paréntesis se llevan acabo primero.

Ejemplo: En las siguientes expresiones indicar el orden de los operadores:

1. $ab + c$
2. a + bc
3. abc + d
4. ab + cd
5. a + bcd
6. $6x^2 - 8x + 1$
7. $7 + sen^3 x^2$
8. $\frac{2+x}{6-x^2}$
9. $\ln(x^3 - 2)$
10. $\ln \frac{x+1}{x-1}$
11. $\frac{6x-2}{\sqrt{x}}$
12. $\sqrt{\frac{6x-2}{x}}$
13. $\frac{\sqrt{6x-2}}{\sqrt{x}}$

14. $\int sen^3(x+1)dx$

15. $\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-5x}$

16. $(x^2-x-2)(7x+1)$

17. $7(1-x)e^{3x-1}\ln(4-2x)$

18. $2e^x+5\ln(x-2)$

19. $sen(e^x+\ln x)$

20. $tan(\frac{x+1}{e^x-1})$

Para resolver cada uno de los ejemplos, primero debemos poner la expresión en forma lineal, por ejemplo el número 8 $\frac{2+x}{6-x^2}$ quedaría: $(2+x)/(6-x^2)$

En el caso de tener varias sumas o multiplicaciones no es necesario usar paréntesis, analicemos: a + b + c

Podría ser: (a + b) + c ; y el árbol es [(a+b)+c [a+b [a] [b]],c]

Pero por la ley asociativa (reacomodo) también podría ser a + b + c; y su árbol es[a+(b+c),a,[b+c,b,c]] decir lo mismo para la multiplicación, sin embargo, al principio mientras nos familiarizamos con las expresiones y adquirimos pericia es conveniente numerarlos de izquierda a derecha como en el primer caso.

Qué sucede si en lugar de suma (+) es resta (–): Los casos serían: (a – b) – c; y el árbol es [(a-b)-c,[a-b,a,b],c]

Pero por la ley asociativa (reacomodo) también podría ser a + b + c; y su árbol es[a-(b-c),a,[b-c,b,c]]

La resta no es asociativa así que … poner los dos casos como la suma …

Son dos expresiones con significado distinto. En este caso si es importante que se enumeren los operadores de izquierda a derecha.

Nota: Los operadores con igual jerarquía se numeran de izquierda a derecha porque en algunos casos resultan equivalentes en general no lo son, por lo que cambia el significado si los numeramos en otro orden, como en el caso de la resta, así que es mejor aplicar el mismo criterio siempre.

Una vez que tenemos la expresión en forma lineal, indicamos el orden de los operadores con los números enteros positivos en orden ascendente.

Ejemplo1: $ab+c$ se representa $a*b+c$ pues hay una operación de multiplicación entre a y b. Y el orden de los operadores es: * (1) y + (2).

Ejemplo 2: a + bc se representa a + b*c pues hay una operación de multiplicación entre b y c. Y el orden de los operadores es: * (1) y + (2).

Ejemplo 7: $7 + sen^3 x^2$ El cuadrado (1), el cubo (2), la función seno (3) y la suma (4).

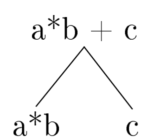
Ejemplo 8: $\frac{2+x}{6-x^2}$ se cambia por $(2+x)/(6-x^2)$. El orden de los operadores es: La suma (1), el cuadrado (2), la resta (3) y la división (4).

12. $\sqrt{\frac{6x-2}{x}}$ se representa $\sqrt{(6 * x - 2)/x}$. La multiplicación (1), la resta (2), la división (3) y la raíz cuadrada (4).

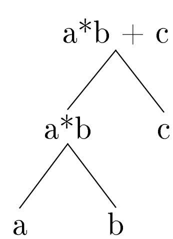
Ejemplo 16: $(x^2 - x - 2)(7x + 1)$ se representa $(x^2 - x - 2) * (7 * x + 1)$ agregando dos operadores de multiplicación. El orden de los operadores es: El cuadrado (1), la primera resta (2), la segunda resta (3), la multiplicación dentro del paréntesis (4), la suma (5) y la otra multiplicación 6.

Árboles sintácticos: Para entender mejor la sintaxis de una expresión podemos hacer un árbol sintáctico. Empezando con el operador de menor rango, o sea el que tiene el número mayor empezar a descomponer hacia abajo en una o dos ramas para cada operador hasta terminar con todos los operadores.

Ejemplo 1. La expresión es $a * b + c$ y sabemos que a la suma le tocó el número 2, por lo tanto en un primer paso tenemos:

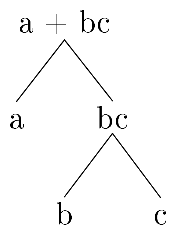


Finalmente descomponemos la suma y tenemos el árbol.

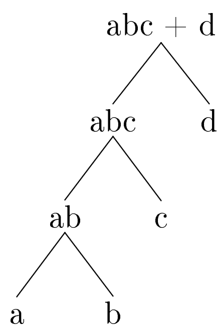


Hacer el árbol sintáctico de los ejemplos 2 al 20.

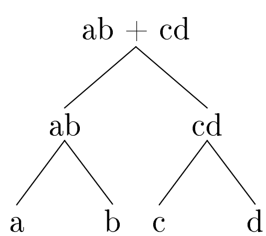
Ejemplo 2:



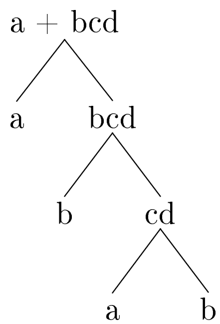
Ejemplo 3:



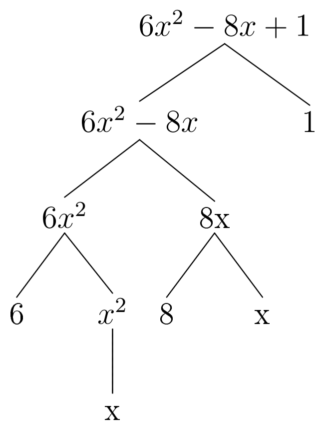
Ejemplo 4:



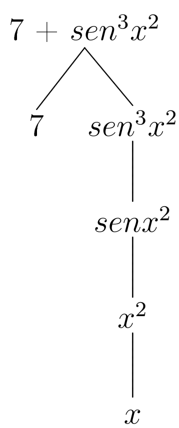
Ejemplo 5:



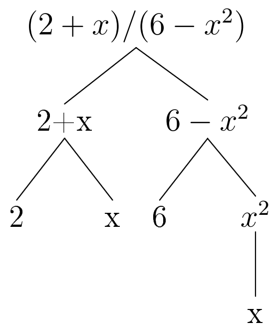
Ejemplo 6:



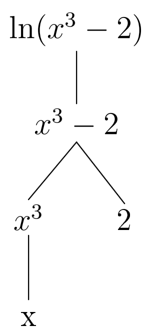
Ejemplo 7:



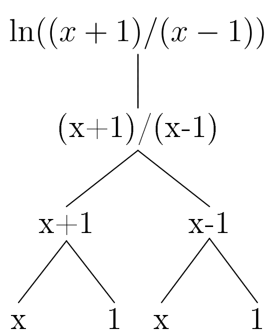
Ejemplo8:



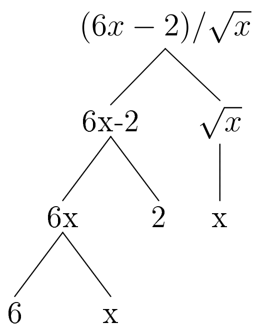
Ejemplo 9:



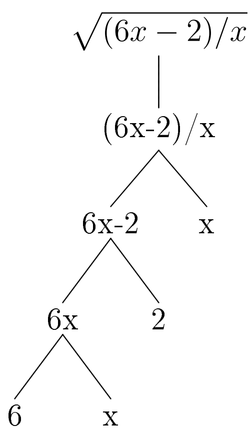
Ejemplo 10:



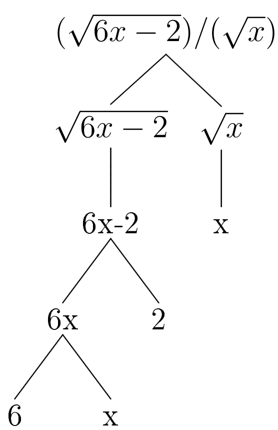
Ejemplo 11:



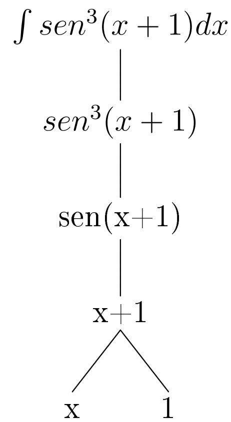
Ejemplo12:



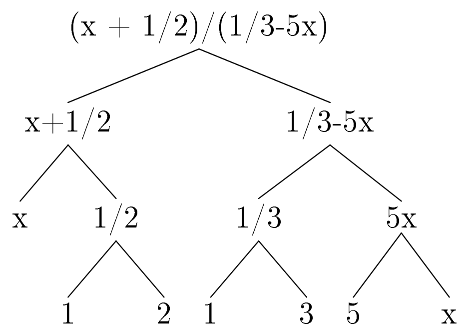
Ejemplo 13:



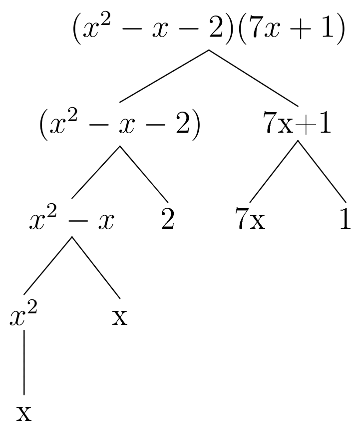
Ejemplo 14:



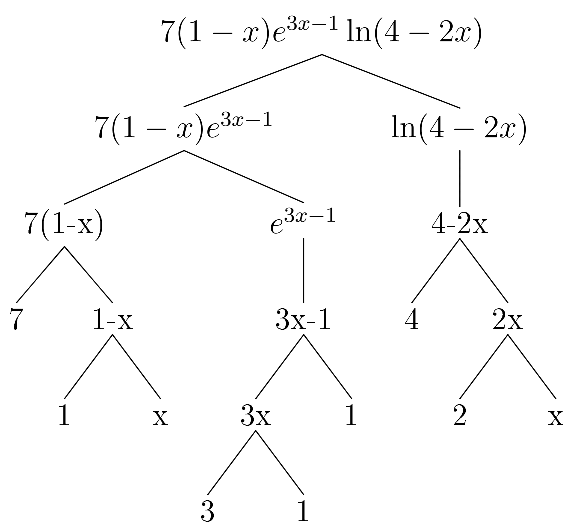
Ejemplo 15:



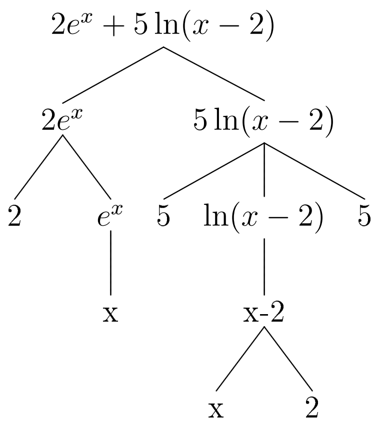
Ejemplo 16:



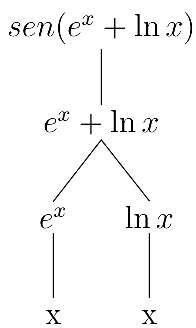
Ejemplo 17:



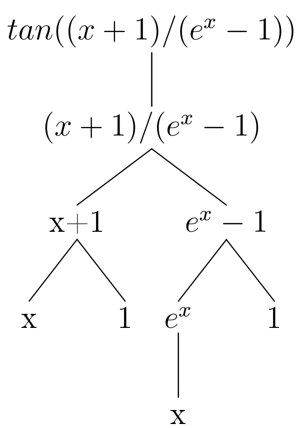
Ejemplo 18:



Ejemplo 19:



Ejemplo 20:

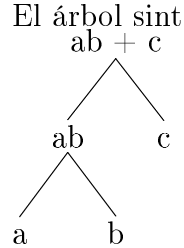


2.3. Sustitución algebraica

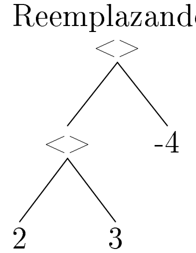
Uno de los aspectos más importantes de los árboles sintácticos es su utilización para entender el concepto de sustitución, porque nos indica el orden correcto en que se deben hacer las sustituciones para evaluar una expresión.

Ejemplo 1. Evaluar la expresión $ab + c$ si $a = 2, b = 3, c = -4$.

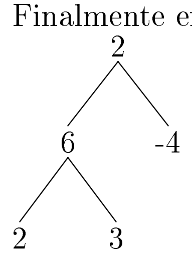
El árbol sintáctico es:



Reemplazando las hojas por los valores tenemos:



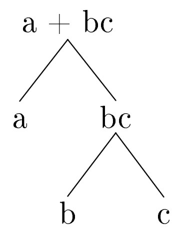
Finalmente efectuamos las operaciones



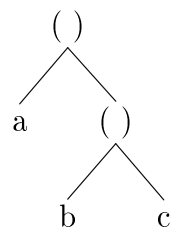
El resultado es el valor de la raíz del árbol, o sea 2.

Ejemplo 2: Evaluar la expresión a + bccon $a = 5, b = -4, c = 2$

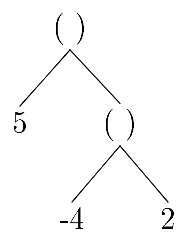
El árbol sintáctico es:



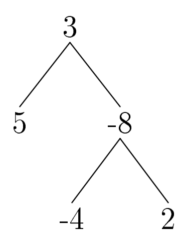
Reemplazando las hojas por los valores tenemos:



Reemplazando las hojas por los valores tenemos:

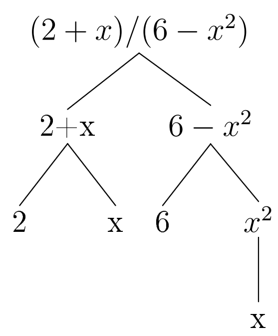


Finalmente efectuamos las operaciones

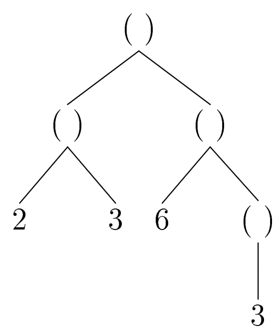


Ejemplo 8: Evaluar la expresión $\frac{2+x}{6-x^2}$ con x=3

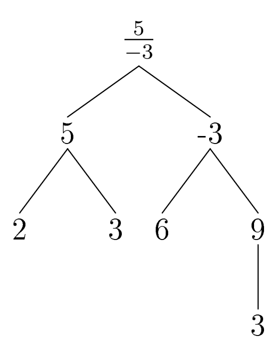
El árbol sintáctico es:



Reemplazando las hojas por el valor de x tenemos:



Finalmente efectuamos las operaciones



2.4. Conceptos matemáticos

¿Las matemáticas son bellas?

Arturo Gamietea Domínguez
CNYN UNAM.

Reflexión.

Frecuentemente escuché de mis profesores que las matemáticas eran bellas, nunca argumentaron por qué, ni profundizaron sobre el tema. ¿Realmente yo las veía bellas? Sinceramente: no.

Encontré varios artículos y libros en donde se mencionaba la belleza de las matemáticas. A pesar de leer con cuidado y tratar de encontrar la susodicha belleza, no la veía por ningún lado. Generalmente se hablaba de que las matemáticas describían cosas bellas de la naturaleza. También se hacía referencia a su aplicación en el arte, como en la pintura, la escultura, la arquitectura y la música.

Pero, ¿realmente eran bellas las matemáticas por sí mismas? Lo que leía, no me convencía y desde esta posición, ni siquiera intentaba convencer a otras personas sobre la belleza de las matemáticas.

Cambié la pregunta por estas dos: ¿tienen las matemáticas lo mismo que las cosas bellas? ¿Qué le pasa a las personas cuando se enfrentan a las cosas bellas? La respuesta a la segunda pregunta es: las cosas bellas cautivan a las personas, un atardecer, un paisaje, una obra de arte; hacen que queden cautivadas y no se sienta el paso del tiempo.

¡Ya está! Casi puedo asegurar que todos hemos tenido alguna vez una experiencia en las matemáticas que nos ha cautivado. Nos hemos enfrentado a un problema matemático y el tiempo pasó sin darnos cuenta. Efectivamente las matemáticas tienen la posibilidad de cautivar. Entonces tienen una característica de las cosas bellas.

Ahora ya no me importa demostrar que las matemáticas son bellas, simplemente propongo diferentes situaciones matemáticas y hago ver cómo quedan prendadas algunas de las personas que me escuchan. Varias quedan absortas con ejercicios de geometría, otras con operaciones aritméticas, algunas con las implicaciones de los conceptos matemáticos.

De esta manera, quienes se dejan cautivar conforman la demostración de que las matemáticas tienen al menos una característica de las cosas bellas. Las matemáticas son bellas por ellas mismas.

2.4.1. Resta y división

Resta

La operación de sustracción $a - b$ en el conjunto de los números Reales esta definida mediante la adición del inverso aditivo de b, es decir:

$$a - b = a + (-b)$$

El inverso aditivo cumple la propiedad:

$$b + (-b) = 0$$

Para el conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Los inversos son:

$$-\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, ...\}$$

y así, agregando el cero, se forma el conjunto de los enteros.

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Ej.1: Cuando se juega a las cartas, es posible representar +$10 una ganancia, mientras que una pérdida se puede representar por -$8.

Ej.2: Cierta posición de 1000 m sobre el nivel del mar puede denotarse con +1000m, mientras que una de 50 m bajo dicho nivel, se puede denotar por -50m.

Puesto que los enteros positivos se sitúan a la derecha del origen en la recta numérica, el conjunto de los enteros negativos constituyen puntos a la izquierda del cero. En general, los enteros a y $-a$ son coordenadas de puntos situados en lados opuestos con respecto del origen y equidistantes.

Ejemplos:

1. (-8)+6= -8+6= -2
2. 10-(-6)=10+6=16
3. 5-8=5+(-8)=-3
4. -9-13= (-9)+ (-13)=-(9+13)=-22
5. 8 -3-7+6=8+6-3-7= (8+6)-(3+7) =14+(-10)=4

Ejercicio No. 1:
Obtenga los valores de las siguientes expresiones:
1. (-3)+ (-6) =
2. (-5) + (-8) =
3. (-4) + (-10) =
4. (-9) + (-1) =
5. (-12) + (-17) =
6. (-15) + (-3) =
7. 17+ (-8) =
8. 20 + (-14) =
9. 25+ (-13) =
10. 15 + (-11) =
11. 22+ (-19) =
12. 18 + (-16) =
13. -18 - (-6 +2) =
14. -20-(-6+14) =
15. -15-(-3+9) =
16. 6-(-8)+ (-20)-(-25)=
17. 10+ (-2)-(-15)-(20)=
18. 7- (9)+ (-8)- (-4) =
19. 12+ (-6)- (10)- (-8)=
20. 2-(-13)+(-7)-(20) =
21. 18- (-9)+ (-8)- (6) =
22. 11+ (-4) – (-16) – (30) =
23. 3-(6-5)- (11-4) =
24. 6 – (12 -20) – (23-9) =
25. 9 + (10-16)- (7-15)=

División

La multiplicación de enteros positivos es la misma que la de los números naturales. Se requiere solamente definir el producto de un entero positivo y un entero negativo y el de dos enteros negativos.

Teorema. Si a, $b \,\epsilon \mathbb{R}$, entonces *a (-b) = -(ab)*

Ejemplos.
1. 3(-4)=-(3x4)=-12
2. 2(-5)=-(2X5)=-10
3. 6(-3)=-(6x3)=-18
4. 7(-4)=-(7x4)=-28
5. 9(-7)=-(9x7)=-63

Teorema. Si a, $b \,\epsilon \mathbb{R}$, entonces *(- a)(-b) =ab*

Ejemplos.
1. (-6)(-9)=6x9=54
2. -5(-4)(3)=(-5(-4))(3)=(20)(3)=60
3. 7(-8)(-6)=(7(-8))(-6)=(-56)(-6)=336
4. 3(-2)(-4)=(3(-2))(-4)=(-6)(-4)=24
5. (-8)(-5)=40

La división de a entre b por tanto, se define como el producto de a por el inverso multiplicativo de b:

$$\frac{a}{b} = a * \frac{1}{b} = a * b^{-1} \qquad ; \, b \neq 0$$

Ejemplos.

1. 16=(16)($\frac{1}{2}$)=8

2. $\frac{-21}{-7}$=$(-21)(-\frac{1}{7})$=3

3. $\frac{54}{-6}$=$(54)(-\frac{1}{6}) = -9$

4. $\frac{-15}{3} = (-15)(\frac{1}{3}) = -5$

5. $\frac{-32}{-8} = (-32)(-\frac{1}{8}) = 4$

División y el cero

1. $\frac{0}{a} = 0,$
2. $\frac{a}{0}$ =,no esta definida.
3. $\frac{0}{0}$ =,indeterminada

Observación. $\frac{p}{q}$,no esta definida para q=*0*.

Ejercicio No.2:
Obtenga los valores de las siguientes operaciones.

1. $(56)/(8) =$
2. $(54)/(9) =$
3. $(48)/(16) =$
4. $(51)/(17) =$
5. $(24)/(-6) =$
6. $(20)/(-4)$=
7. $(48)/(-8) =$
8. $(57)/(-19) =$
9. $(-16)/(8)$=
10. $(-35)/(7) =$
11. $(-36)/(4) =$
12. $(-52)/(13) =$
13. $(-18)/(-9) =$
14. $(-36)/(-4) =$
15. $(-63)/(-7) =$
16. $(-98)/(-14) =$
17. $(2)(8)/(4) =$
18. $(3)(14)/(7) =$

19. $(6)/(2+9)/(2) =$
20. $(28)/(7+15)/(5) =$
21. $(26+2)/(-4) - 10(8-12) =$
22. $(4-14)/(-2) - 7(2-8) =$
23. $(8)/(-4)(2) - (2)(6) - 5 =$
24. $(18)/(3)(6) - (7-35)/4 =$
25. $(72)/(-18)(4) - (3-12)/(-9) =$

2.4.2. Expresión algebraica y polinomios

En algunos conceptos es conveniente utilizar la notación y terminología de los Conjuntos. Un conjunto es una colección de objetos de algún tipo. Los objetos se llaman elementos del conjunto. Para denotar los conjuntos se utilizan normalmente letras mayúsculas, como A, B, C, R, S,. . . ,. Las letras minúsculas, como a, b, x, y,. . . , representan normalmente elementos de los conjuntos. R denota el conjunto de los números reales, y Z el conjunto de los enteros. Si S es un conjunto, entonces a € S, significa que es un elemento de S.

Se utilizan símbolos para expresar un número real aunque no se especifique ningún número real en particular. Una letra que se utilice para representar cualquier elemento de un conjunto dado se llama variable. Una letra que se utilice para representar cualquier elemento específico del conjunto se llama constante. El dominio de una variable es el conjunto de números reales representados por la variable.

Ejemplo 1: $\sqrt{x}$.
Es un número real si y solo si $x \geqq 0$ en este caso, el dominio de x es el conjunto de números reales no negativos.

Ejemplo 2: $\frac{1}{(x-2)}$
En la expresión se debe excluir $x = 2$ para evitar la división entre cero por lo tanto el dominio es el conjunto de todos los números reales diferente de 2.

Expresión Algebraica

Es una colección de variables y números reales, entrelazados con operaciones sumas, restas, divisiones, multiplicaciones o extracción de raíces.

Ejemplos:

1) $\frac{3ab-2cd}{4ac}$,

2) $7abc - \frac{9x}{y} + \sqrt{xz}$,

3) $\frac{2xy+3x}{x-1}$,

4) $x^3 - 2x + \frac{3}{\sqrt{2x}}$,

5) $\frac{4yz^{-2}+(\frac{7}{x+w})^5}{\sqrt[3]{y^2+5z}}$,

Sustitución

Si se sustituyen las variables por números específicos en una expresión algebraica, el número que resulta se le llama valor de la expresión algebraica. (para esos números)

Ejemplos:

1) $3a + 5bc; a = 2, b = 3, c = -1,$
$3a + 5bc = 3(2) + 5(3)(-1) = 6 - 15 = -9$

2) $a - 2(3b + c); a = 3, b = -1, c = -4,$
$a - 2(3b + c) = 3 - 2(3(-1) + (-4)) = 3 - 2(-3 - 4) =$
$= 3 - 2(-7) = 3 + 14 = 17$

3) $\frac{3ab-2cd}{4ac}; a = -2, b = 3, c = -1, d = 2,$
$\frac{3ab-2cd}{4ac} = \frac{3(-2)(3)-2(-1)(2)}{4(-2)(-1)} = \frac{-18+4}{8} = \frac{-14}{8} = \frac{-7}{4}$

4) $\frac{4abc}{d}-\frac{3xyz}{\sqrt{z}}; a=1, b=-1, c=2, d=-2, x=1, y=3, z=4,$
$\frac{4(1)(-1)(2)}{(-2)}-\frac{3(1)(3)(4)}{\sqrt{4}}=\frac{-8}{-2}-\frac{36}{2}=4-18=-14$

5) $\frac{(3a-5b)}{d}+(-2a+3b); a=2, b=-3, c=1, d=3$
$\frac{(3(2)-5(-3))}{3}+((-2)(2)+3(-3))=\frac{6+15}{3}+(-4-9)=$
$=\frac{21}{3}+(-13)=7-13=-6$

Ejercicio No. 3:

Evalúe las expresiones algebraicas, dado que a=2,b=-3,c=1,d=-2,

1) $a-4$
2) $b-2$
3) $6-b$
4) $-5-d$
5) $a+b$
6) $a-b$
7) $b-d$
8) $2a+b$
9) $3a+b$
10) $2a-3c$
11) $4a-d$
12) $2c-d$
13) $2b+3d$
14) $2b-3d$
15) $3a-b-6$
16) $2b+4d-7$
17) $a-2b-3c$
18) $a+2b-3c$
19) $a-b-2d$
20) $d+3c-4d$
21) $2a+(c+d)$

22) $a + 3(b - 2a)$
23) $6cd - 3abd$
24) $3c + b(2a + d)$
25) $\frac{5ad+4bc}{ac}$
26) $\frac{ab-3cd}{ad}$
27) $\frac{bd-2ab}{2d}$
28) $\frac{3b-2ad}{4a}$
29) $\frac{2bc+bd}{3d}$
30) $\frac{b+3c}{a-3c}$

Polinomio

Cuando en una expresión algebraica aparecen únicamente sumas, diferencias o productos decimos que la expresión es un polinomio.

Ejemplos:

1) $5a - 6cde$
2) $7xy + az - 2b + 3$
3) $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$
4) $x^2 + 2x + 5$
5) $x^{16} + 1$

Definición. Un polinomio (univariable) es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los exponentes son enteros no negativos.

Ejemplos de expresiones que no son polinomios:

1) $\frac{1}{x} + 3x$
2) $\frac{x-5}{x^2}$
3) $3x^2 + \sqrt{x} - 2$
4) $\frac{x}{y} + \sqrt{2}$
5) $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{-1}{3}}$

¿Por qué las expresiones anteriores no son polinomios?
1) Porque existen divisiones entre las variables,
2) Tienen exponentes fraccionarios o radicales de las variables.
3) Contienen exponentes negativos.

Grado de un polinomio

En la expresión de la definición de polinomio el grado del polinomio es el exponente de mayor número n.

Ejemplos:

1) $3x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 4$, es de grado 4.
2) $x^8 + 9x^2 - 2x$, es de grado 8.
3) $5x^2 + 2$, es de grado 2.
4) $7x + 9$, es de grado 1.
5) 6, es de grado 0.

Ejercicio No. 4:

Identificar si es una expresión algebraica o polinomio. Los que identifique como polinomio asignarles el grado correspondiente.

1) $x^4 - 3x^2 + 7x + 4$
2) $6z^2 - 3z + 1$
3) $\sqrt{a} + b^3 - \frac{\sqrt{abc}}{c}$
4) $\frac{8x^2y^3 - 10x^3y}{2x^2y}$
5) $y^6 + 7y^3 - 8$
6) $9y^3 + 15y^4 - 7y^5$
7) $\frac{6x^2yz^3 - xy^2z}{xyz}$
8) $xy - 3z + 2$
9) $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$
10) $12c^2 + 50c + 48$
11) $60x^2 - 85x - 24$
12) $\frac{12m^2}{n} + \frac{17m}{\sqrt{n}} - 14\sqrt{n}$
13) $\frac{3u^3v^4 - 2u^5v^2 + (u^2v^2)^2}{u^3v^2}$
14) $64x^2 - 16$
15) $45x^7 + 38x^5 - 8x^3$

Ejercicio No.5:

Evaluar la sustitución para cada expresión con los valores de las variables que a continuación se dan para los problemas del ejercicio 4.

Para a=2,b=-1,c=-3,m=-2,n=4,u=5,v=1,x=3,y=-4,z=-2.

2.4.3. Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad matemática. También se dice que es un enunciado de dos expresiones algebraicas. El lado izquierdo recibe el nombre de primer miembro de la igualdad y el del lado derecho se llama segundo miembro de la igualdad.

Ejemplos:

1) $4(x-3) = 4x - 12$
2) $x + 2 = 10$
3) $x + 5 = x - 7$
4) $x^2 - 3x = 18$
5) $6x - 7 = 2x + 5$

La ecuación $x + y - z = 1$, se dice que es una ecuación lineal debido a que las variables tienen potencia 1 o son de primer grado. Es decir no existen productos entre las variables, ni potencias fraccionarias o negativas, sólo potencia igual a la unidad. Si al sustituir la variable x con un valor a, se obtiene un enunciado verdadero, entonces a se denomina solución o raíz de la ecuación. También se dice que satisface la ecuación.

Ejemplos:

1) $4(x-3) = 4x - 12, \quad x = 1$
$4(1-3) = 4(1) - 12$
$-8 = -8$, proposición verdadera $\therefore$es solución.

2) $x^2 - 5 = 4x, \quad x = 5$
$(5)^2 - 5 = 4(5)$
$20 = 20$,$\therefore$proposición verdadera $\therefore$es solución.

3) $x^2 + \frac{3}{x} = \frac{x^3+3}{x}, \quad x = 3$
$(3)^2 + \frac{3}{3} = \frac{(3)^3+3}{3}$
$9 + 1 = \frac{27+3}{3}$
$10 = \frac{30}{3}$
$10 = 10$, proposición verdadera $\therefore$es solución.

4) $3x + 4x - 2x = 8, \quad x = \frac{8}{5}$
$(3 + 4 - 2)x = 8$
$5x = 8$
$5(\frac{8}{5}) = 8$
$8 = 8$, proposición verdadera $\therefore$es solución.

5) $3x = (x-2) + 6, \quad x = 2$
$3(2) = (2-2) + 6$
$6 = 6$, proposición verdadera $\therefore$ es solución.

Ejercicio No.6:

Sustituir el valor de la variable y demuestrar si la ecuación es una proposición verdadera o se cumple para dicho valor.

1) $4x + 7 = 0, \quad x = \frac{-7}{4}$
2) $x + 2 = 10, \quad x = 8$
3) $\sqrt{3}x - 2 = 0, \quad x = \frac{2}{\sqrt{3}}$
4) $26x - 8 = 14x - 3, \quad x = \frac{5}{12}$
5) $\sqrt{2}x - 5 = 0, \quad x = \frac{5}{\sqrt{2}}$
6) $5x + 3 = 7x - 2, \quad x = \frac{5}{2}$
7) $12w - 7w = 2w + 1, \quad w = \frac{1}{3}$
8) $(x+3) - (3x-1) = 0, \quad x = 2$
9) $(3x-4) - 9x = 6x + 8, \quad x = -1$
10) $6z - 7 = 2z + 5, \quad z = 3$

2.4.4. Funciones

Es un conjunto de pares ordenados tales que no hay dos pares con el mismo primer elemento. También se puede expresar como la relación matemática entre el conjunto A llamado Dominio y el conjunto B llamado Rango.

Su representación es:

$$f : A \to B$$

Dominio de la Función

Es el conjunto de los primeros elementos en los pares ordenados para los cuales se cumple la función o es válida.

Rango de la Función

Conjunto de los segundos pares ordenados para los cuales es válida la función.

Notación. Sean A y B dos conjuntos y f una función tal que su dominio es un subconjunto de A y su rango es un subconjunto de B. La función se representa por:

$$f : A \to B$$

El dominio se representa por DOM(f) y el rango por RAN(f).

Ejemplos:

1) $f(x) = 2x + 4$, Función lineal.

2) $f(x) = 4x^2 + 2x - 3$, Función cuadrática.

3) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$, Función racional lineal.

4) $f(x) = \frac{1}{4x^2+6x+5}$, Función racional cuadrática.

5) $f(x) = sen 2x$, Función Trigonométrica.

6) $f(x) = 5 + ln(x - 1)$, Función logarítmica.

7) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, Función Raíz.

8) $f(x) = \sqrt{3x+2}$, Función Raíz.

9) $f(x) = e^{x-1}$, Función exponencial.

Ejercicio No.7:

Identificar el tipo de Función.

1) $f(x) = 4x - 3$
2) $f(x) = 2x^2 + 5$
3) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
4) $f(x) = 6 + ln(x+2)$
5) $f(x) = \sqrt{x-3}$
6) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
7) $f(x) = sen\frac{1}{2}x$
8) $f(x) = e^{2x+1}$
9) $f(x) = \frac{1}{2x+9}$
10) $f(x) = 4 + ln(x+3)$
11) $f(x) = sen2x$
12) $f(x) = \sqrt{x-1}$
13) $f(x) = \frac{1}{3x^2-5}$
14) $f(x) = 3x + 1$
15) $f(x) = \frac{4}{x+1}$
16) $f(x) = 2x^2 - 1$
17) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$
18) $f(x) = 3e^{x-1}$
19) $f(x) = -\sqrt{x-4}$
20) $f(x) = 2 + ln(x-2)$
21) $f(x) = 2 - 3x$
22) $f(x) = -2senx$
23) $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$
24) $f(x) = x^2 + 3$
25) $f(x) = \frac{1}{2}e^{3x-2}$
26) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
27) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$
28) $f(x) = sen3x$

29) $f(x) = -2 + ln(x+1)$
30) $f(x) = \frac{1}{4} senx$
31) $f(x) = 3 + ln(x+5)$
32) $f(x) = 4x - 9$
33) $f(x) = x^2 - 3x + 8$
34) $f(x) = 3sen2x$
35) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x-5}$

2.4.5. Valor absoluto

El valor absoluto de un número a, denotado |a|, es uno de los dos números +a o –a, el que sea se considera positivo, y el número 0 si a=0.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $|3| = 3$
2) $|-10| = -(-10) = 10$
3) $|8-6| = |2| = 2$
4) $|7-15| = |-8| = -(-8) = 8$
5) $|5-12| = |-7| = 7$

Nota.

$$|a-b| = |b-a|$$

Ejemplos:

1) $|11-5| = 6$
2) $|5-11| = 6$
3) $|8-4| = 4$

4) $|4-8|=4$
5) $|10-12|=2$

Ejemplos:

1)La distancia entre los puntos cuyas coordenadas son 5 y 12 es:

$$|5-12|=|-7|=7$$

2)La distancia cuyas coordenadas son 10 y -3:

$$|10-(-3)|=|13|=13$$

3)La distancia cuyas coordenadas son -8 y -20:

$$|(-8)-(-20)|=|-8+20|=12=12$$

Ejercicio No.8:

1) $|2|=$
2) $|50|=$
3) $|9|=$
4) $|11|=$
5) $|50|=$
6) $|-6|=$
7) $|-1|=$
8) $|-7|=$
9) $|3+6|=$
10) $|7+5|=$
11) $|10+8|=$
12) $|23+5|=$
13) $|19-15|=$

14) $|20 - 6| =$
15) $|23 + 5| =$
16) $|-5 + 35| =$
17) $|14 - 7| =$
18) $|32 - 16| =$
19) $|8 - 8| =$
20) $|19 - 19| =$
21) $|-13 - 9| =$
22) $|-11 - 4| =$
23) $|-3 - 1| =$
24) $|-20 - 20| =$
25) $|-6 + 25| =$

2.4.6. Raíz cuadrada

La raíz cuadrada de un número x es un número no negativo y tal que:

$$y^2 = x$$

Definición. La raíz cuadrada de un número x es un número no negativo expresado como exponente fraccionario:

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

La raíz cuadrada del cuadrado de un número se considera por definición el valor absoluto de un número.

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Nota.

$$\sqrt{x^2} \neq x$$

Ejemplos Numéricos:

1) $\sqrt{64} = \sqrt{2^6} = (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^3 = 8$
2) $\sqrt{144} = \sqrt{16 * 9} = \sqrt{2^4 * 3^2} = \sqrt{2^4} * \sqrt{3^2} = (2^4)^{\frac{1}{2}} * (3^2)^{\frac{1}{2}} =$
$= (2^2)(3^1) = (4)(3) = 12$
3) $\sqrt{\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{2^4}{5^2}} = \frac{(2^4)^{\frac{1}{2}}}{(5^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2^2)}{(5)} = \frac{4}{5}$
4) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{(2^2)^{\frac{1}{2}}}{(3^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}$
5) $\sqrt{72} = \sqrt{36 * 2} = \sqrt{6^2 * 2} = (6^2)^{\frac{1}{2}} * (2)^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$

Ejemplos algebraicos:

1) $\sqrt{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{2}} = a^2$
2) $\sqrt{x^2y^6} = (x^2y^6)^{\frac{1}{2}} = (x^2)^{\frac{1}{2}}(y^6)^{\frac{1}{2}} = xy^3$
3) $\sqrt{4x^2y^4} = (2^2x^2y^4)^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}}(x^2)^{\frac{1}{2}}(y^4)^{\frac{1}{2}} = 2xy^2$
4) $\sqrt{9x^4} = (3^2)^{\frac{1}{2}}(x^4)^{\frac{1}{2}} = 3x^2$
5) $\sqrt{36x^2y^8} = (6^2x^2y^8)^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}}(x^2)^{\frac{1}{2}}(y^8)^{\frac{1}{2}} = 6xy^4$

Ejercicio No.9:

1) $\sqrt{50} =$
2) $\sqrt{81} =$
3) $\sqrt{256} =$
4) $\sqrt{96} =$
5) $\sqrt{169} =$
6) $\sqrt{\frac{4x^{10}}{y^6}} =$
7) $\sqrt{\frac{x^6z^2}{y^4}} =$
8) $\sqrt{a^2b^2} =$
9) $\sqrt{4a^2b^4} =$
10) $\sqrt{10x^2y^2} =$
11) $\sqrt{16a^2b^2} =$

12) $\sqrt{81r^6s^8}=$

13) $\sqrt{8x^4y^6}=$

14) $\sqrt{25a^4b^6c^2}=$

15) $\sqrt{\frac{16d^8}{c4}}=$

16) $\sqrt{(ab)^2}=$

17) $\sqrt{(2r-s)^4}=$

18) $\sqrt{5x^2y^6}=$

19) $\sqrt{(4+x)^4}=$

20) $\sqrt{(a+b)^2}=$

3. Álgebra

3.1. Operaciones algebraicas básicas

Las matemáticas fueron su llave para la aristocracia y el amor

Arturo Gamietea Domínguez CNyN-UNAM.

Joseph Louis Lagrange fue un matemático de origen francés e italiano. Aunque tuvo 10 hermanos, solamente él sobrevivió a la infancia.

Su familia fue aristócrata. Sin embargo su padre fue un empecinado especulador, de tal manera que cuando estaba listo para otorgar a su hijo la herencia; ya no tenía nada que darle.

No obstante este "golpe desafortunado" y gracias a su genialidad en matemáticas pudo no solamente codearse con los más grandes soberanos de la Europa de su tiempo, sino ser admirado y homenajeado por ellos.

Napoleón lo consideró como un valioso colaborador, lo nombró Senador, Contador del Imperio y Gran oficial de la legión de honor, lo llamó "La más grande de las pirámides de las ciencias matemáticas".

Federico el Grande lo invitó a su corte a través del siguiente mensaje: "El soberano más grande de Europa debe tener en su corte al matemático más grande del mundo".

Como cosa curiosa, la presunción de Federico contrastaba con la excesiva modestia del brillante genio.

También fue admirado por el rey de Sardina, así como por Luís XVI y María Antonieta; quienes lo invitaron a participar en su corte.

Su educación inicial se fundamentó en los clásicos y aunque estudió a Arquímedes y Euclides, sus trabajos no le hicieron una gran impresión.

Alrededor de sus 16 años de edad, Lagrange tuvo entre sus manos un ensayo de Halley. Este trabajo de análisis lo cautivó, porque lo encontró muy superior a la geometría sintética griega. En un pequeño lapso de autodidacta se convirtió en un erudito, de lo que en aquel tiempo era el análisis moderno.

A esa misma edad fue profesor de la Escuela Real de Artillería en Turín. Ahí inició una de las carreras más brillantes de las matemáticas en el mundo.

Se podría afirmar que Lagrange es un parte aguas en la historia de las matemáticas, ya que los matemáticos anteriores a él basaban sus trabajos en la geometría. El genio de Joseph Louis hizo a un lado la geometría, a tal grado que su obra maestra que logró a los 19 años de edad "Mecánica Analítica", tiene la observación en el prefacio, de que no contiene diagramas.

Su modestia lo convirtió en un excelente maestro. Su frase típica a cualquier pregunta que se le hacía era "No sé", con el ánimo de darle confianza a su interlocutor y buscar su punto de vista, para saber qué contestar y cómo explicar la respuesta.

Lagrange probó que cada entero positivo puede ser expresado como la suma de cuatro o menos números al cuadrado. Por ejemplo:

$7 = 1 + 1 + 1 + 4$ y $34 = 9 + 25$

Muchas personas creen que esto fue su contribución más significante a las matemáticas: es un resultado muy importante en teoría de números.

Lagrange trabajaba demasiado y llegó a enfermarse. Sus doctores rechazaron atenderlo si no descansaba y hacía ejercicio. Fue necesaria una orden del monarca Federico el Grande para que obedeciera a los galenos. Poco después Lagrange empezó a aplicar sus matemáticas a su propio cuerpo, "Si son unas máquinas hay que darles mantenimiento para que sigan haciendo su trabajo".

Lagrange regresó a París después de la muerte de Federico. Al poco tiempo dijo que las matemáticas estaban muertas para él, que jamás las estudiaría otra vez.

Los intentos de sus amigos de animar a Lagrange para que saliera de su abandono de las matemáticas fallaron. Él se dedicó a estudiar metafísica, historia de la religión, lenguajes, medicina y botánica.

Un romance inesperado le revivió su amor por las matemáticas. La hija joven y brillante de Lemonnier, un astrónomo amigo de Lagrange, se enamoró del genio casi sexagenario. En un principio Lagrange no consideró seria la relación con ella; la joven contaba ¡cuarenta años menos que él! Pero ella persistió hasta que se casaron.

Lagrange fue muy modesto, lo que le llevó a reconocer sin cortapisas el trabajo de sus colegas y asimismo para animar a quienes incursionaban en este maravilloso mundo de las matemáticas.

Al final de su vida, estaba seguro de que haber quedado sin su herencia fue probablemente lo más afortunado que le pudo haber pasado, ya que le abrió las puertas del mundo de las matemáticas.

Y a su vez; las matemáticas le abrieron las puertas de la aristocracia y el amor, seguramente, sin habérselo propuesto.

Introducción

En este tema vamos a aplicar las propiedades de los números reales para efectuar operaciones, simplificar y factorizar expresiones algebraicas. Al realizar los ejercicios recomendados se desarrollará el dominio y la fluidez necesaria para enfrentar con éxito los temas subsiguientes.

Recordemos que las propiedades básicas de los números reales se pueden resumir en tres: *Reacomodo*, *Cancelación* y *Dilema del Mosquetero*. Con estas tres como base y algunas observaciones y aclaraciones vamos a poder desarrollar todos los conocimientos requeridos de álgebra.

Primeramente por el *Dilema del Mosquetero* (Ley Distributiva de la Multiplicación con respecto a la Suma), vemos que

$(7+5)x = 7x+5x$, por lo que si vemos esta propiedad a la inversa tenemos $7x + 5x = (7 + 5)x = 12x$

Esto se le conoce como *reducción de términos semejantes.*

a) Adición y sustracción de Polinomios.

Símbolos de agrupación.

Los símbolos de agrupación, como son los paréntesis ( ), llaves { } y corchetes [ ], se utilizan para señalar, de una manera sencilla, más de una operación. Recordemos que los paréntesis alteran la jerarquía de los operadores, o sea que las operaciones entre paréntesis se llevan acabo primero.

Jerarquía de Operadores: No es necesario utilizar paréntesis cuando el orden en que se deben efectuar las operaciones cumple con la siguiente jerarquía:

1º. Operadores unitarios y funciones como: Potencia, Raíz, seno, coseno, logarítmica, exponencial, etc.

2º. Multiplicaciones y divisiones.

3º. Sumas y restas.

Ejemplo: Eliminar los símbolos de agrupación y reducir términos semejantes:

1) $2x - (5x - 2y) + (x - 6y) =$
$= 2x - 5x + 2y + x - 6y$
$= (2x - 5x + x) + (2y - 6y)$
$= -2x - 4y$

Aquí se utilizó el *Reacomodo* (Leyes asociativa y conmutativa de la suma y el Dilema del Mosquetero, además de la definición de resta que significa sumar el inverso.

2) $7a + 2[2b - 3(3a - 5b)] =$
$= 7a + 2[2b - 9a + 15b]$
$= 7a + 4b - 18a + 30b$
$= (7a - 18a) + (4b + 30b)$
$= -11a + 34b = 34b - 11a$
$= 34b - 11a$

3) $6a - \{2b + [3 - (a + b) + (5a - 2)]\} =$
$= 6a - \{2b + [3 - a - b + 5a - 2]\}$
$= 6a - \{2b + 3 - a - b + 5a - 2\}$
$= 6a - 2b - 3 + a + b - 5a + 2$
$= (6a + a - 5a) + (-2b + b) + (-3 + 2)$
$= 2a - b - 1$

Ejercicio No.1.

1) $3a + (2 + 5a) =$
2) $3a + (4 - 2a) =$
3) $x - (2x - 4) =$
4) $2x - (2 - x) =$
5) $9 - 2(a + 3) + (x + 1) =$
6) $x - 3(2x + 3) + (x + 1) =$
7) $7 - 4(2x - 5) + 3(x - 8) =$
8) $5x + [6 - (2x - 1)] =$
9) $3x - [y - (x - 2y)] - [2x - (y - 2x)] =$
10) $3y - [x - 2(3x - y)] - [2y - (x + 3y)] =$
11) $2x - [y + (1 - x)] - [1 - (y - 3x)] =$
12) $7 - 2[x + (2x - 1)] - [5 - 2(x + 3)] =$
13) $6 + 4[x - (2x + 3)] - [7 + 3(x - 2)] =$
14) $3 + 2[2x - (3x - 1)] + [9 - 4(x + 3)] =$
15) $8 - 3[8 + 4(x - 4)] - [2x - 3(2x - 3)] =$
16) $15 - 5[4 - 2(x + 1)] - [3x - 5(x + 4)] =$
17) $2x - \{5y - [2x - y + (x - y)]\} =$
18) $10 + \{x - [y + (x - 3) - (y - 6)]\} =$
19) $3a + \{b - 2 - [(a - b) + (b - 1)]\} =$
20) $a + \{-2b - [3 + (5a - 2b) - (7a + 2)]\} =$

b) Multiplicación y División

Leyes de multiplicación de números reales 1. Ley conmutativa de la multiplicación. (*Reacomodo*)

$$ab = ba$$

2. Ley asociativa de la multiplicación. (*Dilema del Mosquetero*)

$$a(bc) = (ab)c$$

3. Ley distributiva de la multiplicación. (*Dilema del Mosquetero*)

$$a(b+c)=ab+ac$$

4. *Leyes de los signos.* (Se justifican con las propiedades básicas y la definición de inverso)

$$(+a)(+b)=+ab;$$

$$(-a)(+b)=-ab;$$

$$(+a)(-b)=-ab;$$

$$(-a)(-b)=+ab;$$

Definición.
Si $a \in$ R, $m \in$ N, entonces:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\ veces}$$

También definimos exponentes negativos y el caso para m=0

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

$$a^0=1$$

Teorema 1.

Si $a \in \mathbf{R}$ $m,n \in \mathbf{Z}$, entonces:

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Si $a \neq 0$ entonces:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Si $a \neq 0$ entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

1) $(2ab^2)(3a^4bc^2) =$
$= (2 * 3)(a^1 * a^4)(b^2 * b)(c^2)$
$= 6a^5b^3c^2$

Aquí utilizamos la Ley Asociativa de la Multiplicación (*Dilema del Mosquetero*), la Ley Conmutativa de la Multiplicación (*Reacomodo*) y la definición de exponente.

2) $(-3b^2c^3)(8ab^3c) =$
$= (-3 * 8)(b^2 * b^3)(c^3 * c)(a) =$
$= -24b^5c^4a$

3) $(2x^2yz^3)(-4x^3y^2) =$
$= (2)(-4)(x^2 * x^3)(y * y^2)(z^3)$
$= -8x^5y^3z^3$

4) $(-3^2xy^2)(-5x^2y^3) =$
$= (-9xy^2)(-5x^2y^3)$
$= (-9)(-5)(x * x^2)(y^2 * y^3)$
$= 45x^3y^5$

Podemos tener también potencias de otras potencias.

Ejemplos:

1) $\quad -2^2a^3(ab^3)^2 = -4(a^3 * a^2)(b^6) = -4a^5b^6$

2) $\quad (3x^2y)^2(2xy^3)^3 = (3^2x^4y^2)(2^3x^3y^9) =$
$= (3^2 * 2^3)(x^4 * x^3)(y^2 * y^9)$
$= (9 * 8)(x^7y^{11})$
$= 72x^7y^{11}$

3) $\quad (-2ab^2)^2(-3a^2b)^3(-bc^2)^4 =$
$= (-2)^2a^2b^4 * (-3)^3a^6b^3 * (-1)^4b^4c^8$
$= (4)(-27)(+1)(a^2a^6)(b^4b^3b^4)(c^8)$
$= -108a^8b^{11}c^8$

Ejercicio No.2.

1) $\quad (-2^2ab^4)^3(a^2b)^5 =$
2) $\quad (-x^2)^3(-y)^6(-x^2y^2)^3 =$
3) $\quad (-2ab^2)^2(3a^2b^3)(-a^2c^3)^4 =$
4) $\quad (2ab^3)^2(-3^2a^2c)^3(-a^4bc^2)^5 =$
5) $\quad (x^2)(x^3) - (-x^2)(x) =$
6) $\quad (-2^2a^2)(a^3) + (3^2a^3)(-a^2) =$
7) $\quad 3a^3(a^3b) + (-a^4)(a^2b) =$
8) $\quad (-2^2a^2)^3 - a^2(-2a)^4 =$
9) $\quad (-5x^3)^2(-y^4) - (-6y^2x^3)^2 =$
10) $\quad (ab^2)^3(2a^2bc^2)^2(ac^2) =$

Ley Distributiva Extendida de la multiplicación (*Dilema del Mosquetero*).

$$a(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n) = ab_1 + ab_2 + ab_3 + ... + ab_n$$

Ejemplos:

1) $x(3x^2 + x - 2) =$
$= x(3x^2) + x(x) + x(-2)$
$= 3x^3 + x^2 - 2x$

2) $-2x^2(x^2 - x + 4) =$
$= (-2x^2)(x^2) + (-2x^2)(-x) + (-2x^2)(4)$
$= -2x^4 + 2x^3 - 8x^2$

3) $3a^2b(a^2b - 2b^2c + 5c^2a) =$
$= 3a^2b(a^2b) + 3a^2b(-2b^2c) + 3a^2b(5c^2a)$
$= 3a^4b^2 - 6a^2b^3c + 15a^3bc^2$

Ejercicio No.3.

1) $3x^2(x^3 - 2x^2 + 1) =$
2) $2x^3(3x^2 + x - 5) =$
3) $-2x^3(x^2 - 3x - 2) =$
4) $-x^4(x^2 - 3x - 5) =$
5) $3ab(2a^2 + 4b^2 - 1) =$
6) $2ab(-a^2 - 2a^2b + b^3) =$
7) $ab^2(a^3 - 2a^2b + b^3) =$
8) $-2a^2b(a^3 + 5a^2b^2 - 3b^4) =$
9) $ab^3(a^2 - 2ab - 4b^2) =$
10) $5a^3b^2(ab^2 - b + 4a) =$
11) $-a^2b(3a^2 + b^2 - 1) =$
12) $-2ab^3(2a^2 - 3b^2 - 2) =$
13) $3x(2x - 1) - x(x - 3) =$
14) $2x(5x - 6) - 3x(x - 4) =$
15) $x^2(2x^2 - 3x - 4) - x(x^3 - 3x^2 - 4x) =$

Para multiplicar polinomios, se considera el primer polinomio como una sola cantidad y se aplica la *Ley Distributiva* (*Dilema del Mosquetero*).

Ejemplos:

1. $(x+2)(x+3) = (x+2)x + (x+2)3 =$
$= x(x+2) + 3(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6$
$= x^2 - x - 6$

2. $(3x-4)^2 = (3x-4)(3x-4) =$
$= (3x-4)3x + (3x-4)(-4)$
$= 3x(3x-4) - 4(3x-4)$
$= 9x^2 - 12x - 12x + 16$
$= 9x^2 - 24x + 16$

3. $(x^2-2x+1)(2x-3) = (x^2-2x+1)(2x) + (x^2-2x+1)(-3) =$
$= 2x^3 - 4x^2 + 2x - 3x^2 + 6x - 3$
$= 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

Ejercicios No.4:

1. $(x-7)(x+7) =$
2. $(x-1)(x-6) =$
3. $(x-2)(x-4) =$
4. $(x-6)(x+6) =$
5. $(x+7)(x-3) =$
6. $(x+1)(2x^2-2x+3) =$
7. $(x-2)(x^2+2x-4) =$
8. $(2x-1)(4x^2+2x+1) =$
9. $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2 =$
10. $(x+2)(x-4) - x(x-2) =$
11. $(x-7)(x+4) - x(x+3) =$
12. $(x^2+2x-1)(x^2+2x-1) =$
13. $(3x^2-x+2)(2x^2+x-3) =$
14. $(2x^2-3x+6)(x^2-3x+2) =$
15. $(x^2+3x+2)(x^2-3x+2) =$

Finalmente veremos potencias con fracciones.

Ejemplos:

1. $[\frac{2x^4yz}{6xy^2}]^3 =$

$= [\frac{x^3 z}{3y}]^3 = \frac{x^9 z^3}{3^3 y^3}$

2. $\frac{(2a^2bc^3)^3}{(3ab^2)^2} =$
$= \frac{2^3 a^6 b^3 c^9}{3^2 a^2 b^4} = \frac{8a^4 c^9}{9b}$

3. $\frac{16a^4b^3}{(-2ab)^3} + \frac{36a^5b^2}{(-3a^2b)^2} =$
$= \frac{16a^4b^3}{(-2^3)a^3b^3} + \frac{36a^5b^7}{(-3^2)a^4b^2} = \frac{16a^4b^3}{-8a^3b^3} + \frac{36a^3b^2}{-9a^4b^2} = -2a - 4a = -6a$

Ejercicio No.5:

1. $\frac{x^6y^4}{x^3y^2} =$

2. $\frac{x^3y^3}{x^2y} =$

3. $\frac{a^3b^2}{a^5b} =$

4. $\frac{a^2b^6}{a^2b^8} =$

5. $\frac{9ab^5}{36a^6b^{10}} =$

7. $\frac{26a^3b^2}{39b^5c^6} =$

8. $\frac{-44a^3b^2}{66a^5b^8} =$

9. $\frac{-6a^8b^7}{18a^4b^9} =$

10. $\frac{32a^5b^2}{-8a^3b^6} =$

11. $(\frac{x^4y^2z^7}{2x^3y^4z^9})^3 =$

12. $(\frac{12x^3y^3z}{6x^5y^4})^4 =$

13. $(\frac{x^4y^2z^7}{2x^5y^4z^7})^3 =$

14. $(\frac{6x^2y^3z}{8xy^5z^2})^3 =$

15. $\quad (\frac{12x^3y^2z^4}{18xy^2z^3})^4 =$

c) División de un polinomio por un monomio.

d) Productos Notables. (OPCIONAL)

Ciertos productos ocurren con tal frecuencia en álgebra que merecen atención especial, se presentan algunos:

i) $\quad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ii) $\quad (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

iii) $\quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

iv) $\quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

v) $\quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^2$

vi) $\quad (x-y)^2 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Donde x,y representan números del conjunto de los números reales.

Ejemplos:

1) $\quad (x+5)(x+1) = (x)(x) + (x)(1) + (5)(x) + (5)(1) =$
$= x^2 + x + 5x + 5 = x^2 + 6x + 5$

2) $\quad (x-7)(x-3) = (x)(x) + (x)(-3) + (-7)(x) + (-7)(-3) =$
$= x^2 - 3x - 7x + 21$
$= x^2 - 10x + 21$

3) $(x-5)(x+2) = (x)(x) + (x)(2) + (-5)(x) + (-5)(2) =$
$= x^2 + 2x - 5x - 10$
$= x^2 - 3x - 10$

4) $(x-8)(x+2) = (x)(x) + (x)(2) + (-8)(x) + (-8)(2) =$
$= x^2 + 2x - 8x - 16$
$= x^2 - 6x - 16$

5) $(x+7)(x+5) = (x)(x) + (x)(5) + (7)(x) + (7)(5) =$
$= x^2 + 5x + 7x + 35$
$= x^2 + 12x + 35$

6) $(2x+1)(3x-5) = (2x)(3x) + (2x)(-5) + (1)(3x) + (1)(-5) =$
$= 6x^2 - 10x + 3x - 5$
$= 6x^2 - 7x - 5$

7) $(2x+3)(5x-2) = (2x)(5x) + (2x)(-2) + (3)(5x) + (3)(-2) =$
$= 10x^2 - 4x + 15x - 6$
$= 10x^2 + 11x - 6$

8) $(4x+3)(3x-1) = (4x)(3x) + (4x)(-1) + (3)(3x) + (3)(-1) =$
$= 12x^2 - 4x + 9x - 3$
$= 12x^2 + 5x - 3$

9) $(3x+2)(5x-1) = (3x)(5x) + (3x)(-1) + (2)(5x) + (2)(-1) =$
$= 15x^2 - 3x + 10x - 2$
$= 15x^2 + 7x - 2$

10) $(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = (x)(x) + (x)(2) + (2)(x) + (2)(2) =$

$= x^2 + 2x + 2x + 4$
$= x^2 + 4x + 4$

11) $(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = (x)(x)+(x)(-3)+(-3)(x)+(-3)(-3) =$
$= x^2 - 3x - 3x + 9$
$= x^2 - 6x + 9$

12) $(2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3) = (2x)(2x)+(2x)(3)+(3)(2x)+(3)(3) =$
$= 4x^2 + 6x + 6x + 9$
$= 4x^2 + 12x + 9$

13) $(4x - 3y)^2 = (4x - 3y)(4x - 3y) =$
$= (4x)(4x) + (4x)(-3y) + (-3y)(4x) + (-3y)(-3y)$
$= 16x^2 - 12xy - 12xy + 9y^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$

Ejercicio No.6:

Evaluar los siguientes productos notables.

1. $(x + 3)(x + 2) =$
2. $(x - 4)(x - 3) =$
3. $(x - 4)(x - 2) =$
4. $(x - 4)(x + 2) =$
5. $(x + 4)(x - 2) =$
6. $(x - 5)(x + 3) =$
7. $(x + 3)(x + 5) =$
8. $(x - 3)(x + 1) =$
9. $(x - 3)(x + 5) =$
10. $(x + 5)(x + 1) =$
11. $(x - 3)(x - 5) =$
12. $(x - 5)(x + 1) =$
13. $(x + 5)(x + 1) =$
14. $(x - 7)(x + 3) =$

15. $(x-5)(x-2) =$
16. $(x-8)(2x+3) =$
17. $(x+7)(3x-1) =$
18. $(x-1)(7x-4) =$
19. $(x-2)(3x+2) =$
20. $(x-2)(7x-6) =$
21. $(6x-3)(2x+3) =$
22. $(2x+5)(4x-1) =$
23. $(7x-6)(4x+3) =$
24. $(3x-1)(4x+3) =$
25. $(7x-4)(2x+5) =$
26. $(3x+2)(4x-1) =$
27. $(5x+1)(2x-3) =$
28. $(2x-1)(2x+3) =$
29. $(7x+1)(3x-4) =$
30. $(3x-1)(2x+5) =$

3.2. Factorización

Si un polinomio se escribe como el producto de otros polinomios, cada polinomio del producto es un factor del polinomio original.

Por ejemplo:
Puesto que $x^2-9=(x+3)(x-3)$,entonces $(x+3)$ y $(x-3)$ son factores de x^2-9.

La factorización es de gran importancia en numerosas aplicaciones matemáticas, ya que permite reducir el estudio de expresiones complicadas al estudio de expresiones más simples. Se pueden determinar propiedades importantes del polinomio x^2-9, haciendo un análisis de los factores $(x+3)$ y $(x-3)$.

Interesan principalmente los factores no triviales de los polinomios, esto es factores que contienen polinomios de grado mayor que cero, excepto si los coeficientes son enteros en cuyo caso se separa el factor común entero de los términos del polinomio. Esto se hace aplicando la ley distributiva (Dilema del Mosquetero) a la inversa.

Ejemplo:

$$4x^2y+8z^3=4(x^2y+2z^3)$$

Es necesario especificar el sistema del cual se han de elegir los coeficientes en las factorizaciones, en este caso sólo se seleccionarán coeficientes enteros.

Factorización por Factor Común

Como ya habíamos mencionado la factorización por factor común, Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero) es muy importante y es quizá la esencia de los métodos de factorización porque en su comprensión está la base de todos los métodos de factorización.

La explicación es muy simple, factorizar por Factor Común es aplicar la Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero / 2a. opción) a la inversa, esto es:

$ab + ac \; = \; a(b + c)$

Ejemplos:

1) $7xy + 2xz \; = \; x(7y + 2z)$

2) $3x^2 + 5xy \; = \; x(3x + 5y)$

3) $9a^2 + 12ab \; = \; 3a(3a + 4b)$

4) $7x^3 + 4x^2 \; = \; x^2(7x + 4)$

5) $11ab - 4ac \; = \; a(11b - 4c)$

6) $10a^3b^2c^5 + 5a^2b^4c^4 - 20ab^7c^3 \; = \; 5ab^2c^3(2a^2c^2 + ab^2c - 4b^5)$

7) $6x^3 - 21x^2 + 18x \; = \; 3x(2x^2 - 7x + 6)$

8) $4a^3 + 8a^2 - 60a \; = \; 4a(a^2 + 2a - 15)$

Una variante interesante del Método de Factor Común es la factorización por Agrupación: En este caso se separan en dos partes los términos de la expresión y cada uno se factoriza por separado, si en los resultados queda un factor común se vuelve aplicar el método de Factor Común:

$ac + ad + bc + bd \; = \; a(c + d) + b(c + d) \; = \; (c + d)(a + b)$

Ejemplos:

1) $x^2 + 7x + xy + 7y \; = \; x(x + 7) + y(x + 7) = (x + 7)(x + y)$

2) $x^3 + x^2 + 6x + 6 \; = \; x^2(x + 1) + 6(x + 1)$

3) $a^2 - 5a + 3a - 15 \; = \; a(a - 5) + 3(a - 5) = (a - 5)(a + 3)$

4) $2a^3 - 5a^2 + 4a - 10 \; = \; a^2(2a - 5) + 2(2a - 5) = (2a - 5)(a^2 + 2)$

Ejercicio No. 7

1) $xz + xw + yz + yw = (z + z)(x + y)$

2) $x^3 - 9x^2 + 2x–18 = (x - 9)(x^2 + 1)$

3) $6x^3 - 2x^2 + 7x - 14 = (x - 2)(3x^2 + 7)$

4) $x^3 + 4x^2y + xy^2 + 4y^3 = (x + 4y)(x^2 + y^2)$

5)$x^2 + 2x - x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

6)$5x^2 - 15x + x - 3 = (x - 3)(5x + 1)$

7)$2x^2 + 8x - x - 4 = (x + 4)(2x - 1)$

8)$4x^2 + 8x + x + 2 = (x + 2)(4x + 1)$

9)$7x^2 - 14x - 6x + 12 = (x - 2)(7x - 6)$

Factorización por Productos Notables (OPCIONAL)

1)$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, Diferencia de cuadrados.

2)$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)(x+y) = (x+y)^2$, Trinomio cuadrado perfecto.

3)$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$, Trinomio cuadrado no perfecto.

4)$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, Suma de cubos.

5)$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^3)$, Diferencia de cubos.

Factorización de un trinomio cuadrático

Empezando también con la Ley Distributiva (Dilema del Mosquetero) podemos efectuar el siguiente producto:

$$(ax+b)(cx+d) \;=\; acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

Si observamos con cuidado, vemos que el coeficiente del término cuadrático es el producto de a y c, que son los coeficientes de x en los factores, el término independiente de x es el producto de b y d, que son los términos independientes de x en los factores; tenemos entonces dos pares de números y el coeficiente de x es la suma de los resultados al multiplicar los primeros por los segundos. Esto es:

acx^2	$+(ad+bc)x$	$+bd$
a		b
c		d

O sea que haciendo el producto cruzado de a con c, y de b con d se obtiene el coeficiente de x

Ejemplos:

1) $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$

2) $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$

3) $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$

4) $x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$

5) $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

6) $5x^2 - 14x - 3 = (x - 3)(5x + 1)$

7) $2x^2 + 7x - 4 = (x + 4)(2x - 1)$

8) $4x^2 + 9x + 2 = (x + 2)(4x + 1)$

9) $7x^2 - 20x + 12 = (x - 2)(7x - 6)$

10) $3x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(3x + 2)$

11) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5) = (x + 5)^2$

12) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4) = (x + 4)^2$

13) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$

14) $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)(x - 6) = (x - 6)^2$

15) $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)(x + 7) = (x + 7)^2$

Ejercicio No. 8:

1) $x^2 - x - 6 =$
2) $x^2 + x - 12 =$
3) $x^2 - 6x + 8 =$

4) $x^2 - 2x - 8 =$
5) $x^2 + 2x - 8 =$
6) $x^2 - x - 20 =$
7) $x^2 - 2x - 15 =$
8) $x^2 + 8x + 15 =$
9) $x^2 - 8x + 15 =$
1 0)$x^2 - 4x - 5 =$
11) $x^2 + 6x + 5 =$
12) $x^2 - 4x - 21 =$
13) $x^2 - 10x + 21 =$
14) $x^2 + 3x - 10 =$
15) $x^2 - 7x + 10 =$
16) $x^2 + 6x - 16 =$
17) $x^2 - 2x - 35 =$
18) $x^2 + 12x + 35 =$
19) $x^2 + x - 2 =$
20) $x^2 - 3x + 2 =$
21) $5x^2 - 14x - 3 =$
22) $2x^2 + 7x - 4 =$
23) $7x^2 - 13x - 2 =$
24) $3x^2 - 13x + 4 =$
25) $4x^2 + 13x - 12 =$
26) $2x^2 - 9x - 5 =$
27) $2x^2 - 7x - 15 =$
28) $4x^2 + 15x + 9 =$
29) $3x^2 - 7x - 6 =$
30) $7x^2 + 2x - 5 =$
31) $6x^2 + 3x - 3 =$
32) $5x^2 - 17x + 6 =$
33) $4x^2 + 9x + 2 =$
34) $7x^2 - 20x + 12 =$
35) $12x^2 + 5x - 2 =$

3.3. Operaciones con Fracciones

Los cocientes de las expresiones algebraicas se le llama *expresiones fraccionarias.*

Ejemplos:

1) $\frac{x^2-5x+1}{x^3+7} =$

2) $\frac{x^4z^2-3yz}{5z} =$

3) $\frac{1}{4xy} =$

4) $\frac{x^2+4x-1}{x+2} =$

5) $\frac{3}{5xz} =$

Recordemos algunas reglas básicas relacionadas con fracciones:

Multiplicación:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Adición:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Sustracción:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

División:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

De las propiedades de las fracciones se tiene:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{d} = \frac{a_1}{d} + \frac{a_2}{d} + \frac{a_3}{d} + ... + \frac{a_n}{d}$$

Ejemplo:

1. $\frac{3a^3-2a^2b-ab^2}{-ab} =$
$= \frac{3a^3}{-ab} + \frac{-2a^2b}{-ab} + \frac{-ab^2}{-ab} = \frac{-3a^2}{b} + 2a + b$

2. $\frac{12x^3-6x^2+18x}{6x} =$
$= \frac{12x^3}{6x} + \frac{6x^2}{6x} + \frac{18x}{6x} = 2x^2 - x + 3$

3. $\frac{(3x+a)^2-a(3x+a)}{(3x+a)} =$
$= \frac{(3x+a)^2}{3x+a} - \frac{a(3x+a)}{3x+a} = (3x+a) - a = 3x + a - a = 3x$

Ejercicio No.9:

1. $\frac{x^2+3x-2}{x} =$

2. $\frac{2x^2-x+1}{x} =$

3. $\frac{4x^2+x+2}{2x} =$

4. $\frac{15x^3-3x^2+6x}{3x^2} =$

5. $\frac{9x^2-6xy-12y^2}{3xy} =$

6. $\frac{2x^4y^2-4x^3y^3+6x^2y^4}{-2x^3y^3} =$

7. $\frac{(2x-a)^2-a(2x-a)}{(2x-a)} =$

8. $\frac{(x-3a)^2+2a(x-3a)}{(x-3a)} =$

9. $\frac{(3a^4-6a^3+18a^2}{-3a^2} - (a-2)(a-3) =$

10. $\frac{a^5-4a^4+6a^3}{-a^3} =$

11. $\frac{2a^4b-4a^3b^2+2a^2b^3}{2a^2b} =$

12. $\frac{4a^5-6a^4-8a^3}{2a^3} =$

13. $(a^3b^3 - 2a^2b^4 - 15ab^5)/(ab^{3)} =$

14. $(5x^5y^2 - 4x^4y + 2xy)/(x^2y) =$

15. $(25x^6y^4z^2 + 15x^3y^3z^3 - 10x^2y^2z)/(5x^2yz) =$

Muchos problemas en matemáticas incluyen combinaciones de expresiones racionales y luego se trata de simplificar el resultado.

Puesto que las expresiones racionales son cocientes que contienen símbolos que representan números reales, se pueden aplicar las propiedades para cocientes.

En problemas de simplificación es de particular importancia la siguiente propiedad:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} * \frac{d}{d} = \frac{a}{d} * 1 = \frac{a}{b};$$

Esto es,

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$$

Esta propiedad se enuncia de la siguiente manera:¨Un factor común en el numerador y en el denominador puede ser cancelado del cociente¨.

El modo de usar esta técnica en problemas en que intervienen expresiones racionales es factorizando el numerador y el denominador de la expresión racional dada en factores primos, y cancelando los factores comunes que aparezcan tanto en el numerador como en el denominador. La expresión resultante se dice que ha sido simplificada, que es irreducible.

Ejemplos:

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas.

1) $\frac{3x^2-5x-2}{x^2-4} =$

Si factorizamos el numerador y el denominador y se cancelan los factores comunes queda:

$\frac{3x^2-5x-2}{x^2-4} = \frac{(3x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(3x+1)}{(x+2)}$

Se canceló el factor común (x-2); esto es, dividimos numerador y denominador entre (x-2).

2) $\frac{2-x-3x^2}{6x^2-x-2} =$

$= \frac{2-x-3x^2}{6x^2-x-2} = \frac{(1+x)(2-3x)}{(2x+1)(3x-2)} = -\frac{(3x-2)(1+x)}{(3x-2)(2x+1)} = -\frac{(1+x)}{(2x+1)}$

3) $\frac{6x^2-7x-5}{4x^2+4x+1} =$

$= \frac{6x^2-7x-5}{4x^2+4x+1} = \frac{(3x-5)(2x+1)}{(2x+1)(2x+1)} = \frac{(3x-5)}{(2x+1)}$

4) $\frac{r^2+2rt+t^2}{r^2-t^2} =$

$= \frac{r^2+2rt+t^2}{r^2-t^2} = \frac{(r+t)(r+t)}{(r+t)(r-t)} = \frac{(r+t)}{(r-t)}$

Operaciones con expresiones algebraicas.

Ejemplos:

Efectuar las operaciones con fracciones algebraicas indicadas y simplificar.

1) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-1} * \frac{2x-2}{x-3} =$

$= \frac{(x-3)(x-3)}{(x-1)(x+1)} * \frac{2(x-1)}{(x-3)} = \frac{2(x-3)(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-3)(x-1)} = \frac{2(x-3)}{(x+1)}$

2) $\frac{x+2}{2x-3} \div \frac{x^2-4}{2x^2-3x} =$

$= \frac{x+2}{2x-3} * \frac{2x^2-3x}{x^2-4} = \frac{x+2}{2x-3} * \frac{x(2x-3)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(x+2)(2x-3)}{(x+2)(x-2)(2x-3)} = \frac{x}{x-2}$

Una variante importante de la regla

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}$$

es cuando los denominadores tienen un factor común:

[:: espacio para ecuación ::]

En este caso el procedimiento es mediante el uso del Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los denominadores o Mínimo Común Denominador (MCD) de las fracciones. El MCD de las fracciones se puede encontrar mediante la factorización en primos de cada denominador, y multiplicando luego los factores primos distintos utilizando el mayor exponente que aparezca en cada factor primo.

Ejemplos:

3) $\frac{6}{x(3x-2)} + \frac{5}{3x-2} - \frac{2}{x^2} =$

a)Los denominadores se factorizan primeramente en caso de que no esten ya factorizados.

b)Encontrar el MCD en este caso es $x^2(3x-2)$.

c)Dividir el MCD por cada denominador: el cociente se multiplica por el numerador.

$\frac{x^2(3x-2)}{x(3x-2)} = x$, se multiplica por 6.

$\frac{x^2(3x-2)}{(3x-2)} = x^2$, se multiplica por 5.

$\frac{x^2(3x-2)}{x^2} = (3x-2)$, se multiplica por (-2).

$\frac{x(6)+x^2(5)-(3x-2)(2)}{x^2(3x-2)} = \frac{6x+5x^2-6x+4}{x^2(3x-2)} = \frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)} =$

d) Se simplifica:

4) $\frac{2x+5}{x^2+6x+9} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} =$

Factorizar:

$= \frac{2x+5}{(x+3)(x+3)} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x-3}$

Obtener el MCD:

$\frac{(2x+5)(x-3)+x(x+3)+(1)(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)} = \frac{(2x^2-x-15)+(x^2+3x)+(x^2+6x+9)}{(x+3)^2(x-3)} =$

$\frac{4x^2+8x-6}{(x+3)^2(x-3)} = \frac{2(2x^2+4x-3)}{(x+3)^2(x-3)}$

Simplificar la fracción compleja:

5) $\frac{1-\frac{2}{x+1}}{x-\frac{1}{x}} =$

$$= \frac{1-\frac{2}{x+1}}{x-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{(x+1)-2}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{(x+1)(x-1)}{x}} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+1)(x-1)} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Ejercicio No. 10: Simplificar las expresiones algebraicas siguientes y realizar las operaciones indicadas.

1) $\frac{6x^2+7x-10}{6x^2+13x-15} =$

2) $\frac{10x^2+29x-21}{5x^2-23x+12} =$

3) $\frac{12y^2+3y}{20y^2+9y+1} =$

4) $\frac{4z^2+12z+9}{2z^2+3z} =$

5) $\frac{6-7a-5a^2}{10a^2-a-3} =$

6) $\frac{6y-5y^2}{25y^2-36} =$

7) $\frac{4x^3-9x}{10x^4+11x^3-6x^2} =$

8) $\frac{16x^4+8x^3+x^2}{4x^3+25x^2+6x} =$

9) $\frac{9t-6}{8t^3-27} * \frac{4t^2-9}{12t^2+10t-12} =$

10) $\frac{a^2+4a+3}{3a^2+a-2} * \frac{3a^2-2a}{2a^2+13a+21} =$

11) $\frac{5a^2+12a+4}{a^4-16} \div \frac{25a^2+20a+4}{a^2-2a} =$

12) $\frac{x^3-8}{x^2-4} \div \frac{x}{x^3+8} =$

13) $\frac{6r}{3r-1} - \frac{4r}{2r+5} =$

14) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{x-1}{x+1} =$

15) $\frac{3u+2}{u-4} + \frac{4u+1}{5u+2} =$

16) $\frac{5}{x^2-x-6} - \frac{3}{5x^2-14x-3} + \frac{1}{10x^2-13x-3} =$

17) $\frac{1}{x^2+x-12} + \frac{4}{2x^2+7x-4} - \frac{2}{4x^2+4x-3} =$

16) $\frac{x}{x^2-6x+8} + \frac{2-x}{7x^2-13x-2} + \frac{7}{21x^2-25x^4} =$

17) $\frac{x-3}{x^2-4x-5} - \frac{2x+1}{7x^3+2x^2-5x} + \frac{5x-3}{14x^3+115x-15} =$

18) $\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{5}}{\frac{x+1}{5}} =$

19) $\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x-1}}{\frac{1}{x}-\frac{5}{x+1}} =$

20) $\frac{\frac{6x-5}{3}+\frac{7}{2}}{\frac{1}{5}-\frac{2x-7}{3}} =$

3.4. Propiedades de la igualdad

3.5. Ecuaciones lineales

3.6. Ecuaciones cuadráticas

4. Representación gráfica de funciones

Una función es una relación entre dos variables cuyo resultado es un pareja ordenada de valores (x,y) en el plano cartesiano, cuyo primer elemento (el valor de la x) nunca se repite.

Esta relación puede ser de diferentes tipos, por ejemplo:

- Lineal
- Cuadrática
- Raíz Lineal
- Raíz Cuadrática
- Racional Lineal
- Racional Cuadrática
- Exponencial
- Logarítmica
- Trigonométrica

4.1. Funcion Lineal

La función lineal es de la forma $f(x) = b + mx$ donde b representa la intersección de la recta con el eje y cuando el valor de $x = 0$ se le llama ordenada en el origen. La m es la pendiente de la recta, la cual puede tener tres condiciones.

$$m = \begin{cases} m > 0 & \textit{pendiente positiva} \\ m = 0 & \textit{sin pendiente} \\ m < 0 & \textit{pendiente negativa} \end{cases}$$

El caso donde $m = 0$. nos define una recta horizontal o función constante.

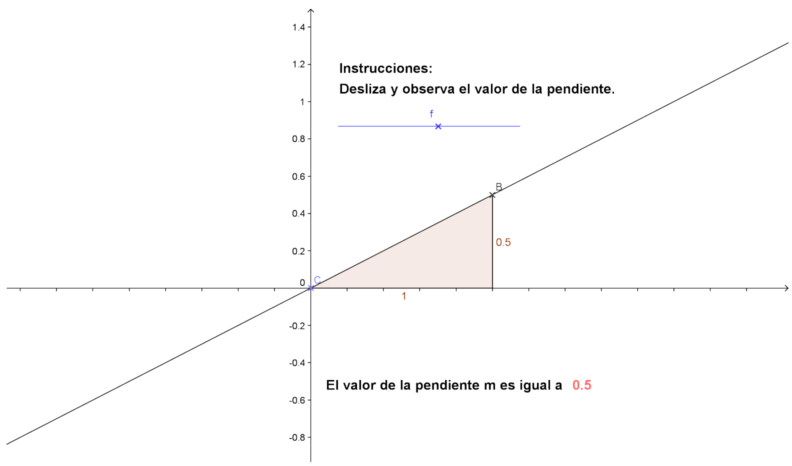
Cuando $b = 0$ tenemos la funcion $f(x) = x$ que nos representa una función que pasa por el origen (0.0).

La pendiente se interpreta en la práxis como el cociente de “lo que sube o baja la recta entre lo que avanza”. Si consideramos un incremento unitario en el avance de la recta (es decir uno en el denominador), el cálculo de la misma es muy simple.

$$m = \frac{sube\, o\, baja}{1}$$

Considerando el valor *sube* (positivo) y *baja* (negativo).

En la siguiente grafica observamos como el valor de la pendiente es igual a 0.5 positivo, resultado de avanzar una unidad y subir 0.5 unidades.



4.1.1. Graficación de la función lineal

Para graficar la función se siguen los siguientes pasos.

1er paso.

Encuentre los valores de intersección con el eje de las x. Lo anterior igualando la función a cero y resolviendo para la x,

Ejemplo.

Sea la función lineal

$f(x) = 3x - 6$ igualando a cero

$3x - 6 = 0$ cancelando 2 (Inverso Aditivo)

$3z - 6 + 6 = 0 + 6$

$3z = 6$ cancelando 3 (Inverso Multiplicativo)

$3z(\frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{3})$

$x = 2$

Entonces el punto de interseccion con el eje x es (2,0)

2do paso.

Encuentre la interseccion con el eje y.

Esto se realiza sustituyendo $x=$ 0

$f(0) = 3(0) - 6$

$f(0) = -6$

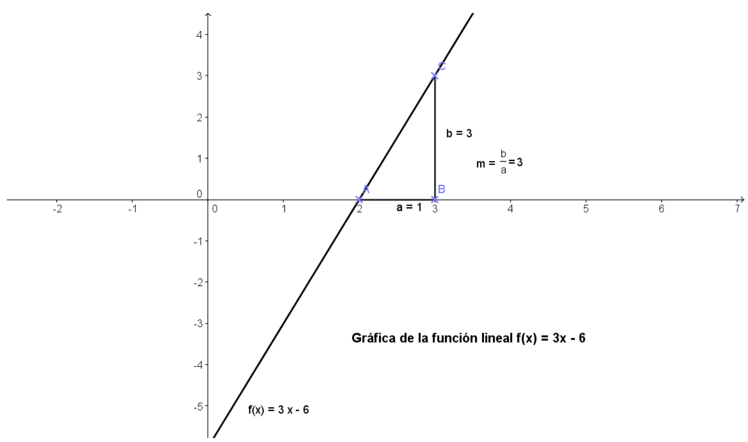
Esto es el punto de interseccion es (0,-6)

3er paso.

Encuentre el valor de la pendiente.

$m = \frac{3}{1} = 3$ lo que quiere decir una pendiente positiva en la que se avanza una unidad en x y se sube 3 unidades en y.

Es factible en este momento pasar una recta por los puntos (2,0) y (0.-6) para encontrar la grafica de la recta.



Vea la figura anterior y observe los valores calculados previamente y su posición en la gráfica.

Baje el siguiente archivo llamado Pendiente de GeoGebra para ver el comportamiento de la función con diferentes valores de la pendiente.

Ejemplos:

Encuentre con el método desarrollado anteriormente los puntos característicos y las graficas de las funciones siguientes, corrobore sus resultados usando el software GeoGebra. Identifique los valores de a y m comente lo que sucede cuando los valores son positivos o negativos:

$y = 3x + 5$

$f(x) = -5x + 2$

$y = x$

$y = -\frac{1}{2}x + 4$

$3x + 2y = 12$

$f(x) = -3 + 3x$
$f(x) = -x$

4.1.2. Dominio y Rango de la Función Lineal.

Esta función como podemos observar en la gráfica es válida para todos los valores de x, por lo tanto $D_f = (-\infty, \infty)$, los Parentesis indican que el intervalo es abierto. y el rango $R_f = (-\infty, \infty)$ es igual al dominio.

4.2. Funcion Cuadrática.

La funcion cuadratica cuya forma general es $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde el caso mas simple es cuando $b = 0,\ c = 0,\ a = 1$ es decir, $f(x) = x^2$que representa una parabola que pasa por el origen (0,0). de gráfica como la siguiente.

El vértice de coordenadas (0,0) abriendose hacia arriba de manera simetrica al eje y, con dominio $D_f = (-\infty, \infty)$ donde (indica un intervalo abierto, es decir que el valor no se incluye en él, y rango $R_f = [0, \infty)$. Donde [indica que el intervalo es cerrado, es decir que el cero está incluido.

Retomando la forma general, vemos que ésta función se pueden identificar algunas características generales conociendo algunos conceptos, como por ejemplo el valor del coeficiente principal, es decir el de la variable cuadrática (a) y el discriminante $b^2 - 4ac$.

Donde el valor de a puede ser $\begin{cases} a > 0 & \textit{parabola abre hacia arriba} \\ a < 0 & \textit{parabola abre hacia abajo} \end{cases}$

y el discriminante que nos permite saber cuantas veces la gráfica de la parábola cruza el eje de las x's.

Observemos la grafica anterior donde la parabola corta al eje en un solo punto "el origen", pero cuando los valores de b y c son distintos de cero, las coordenasdas del vértice de la parabola se pueden ubicar en cualquier parte del plano. Y dependiendo de su posición es que pueden o no cortar al eje de las *x's.* Una manera de saber si la gráfica de la parábola intersecta el eje o no es el uso del discriminante.

Que puede tener tres casos. $\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 & \textit{corta en dos puntos el eje } x \\ b^2 - 4ac = 0 & \textit{corta en un punto el eje } x \\ b^2 - 4ac < 0 & \textit{no corta el eje } x \end{cases}$

En el primer caso si además el valor obtenido del cálculo del discriminante éste tiene raiz exacta; Se puede factorizar la función con los métodos estudiados en la unidad anterior, en caso contrario se tiene que usar la formula general.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ donde *a, b* y *c* se refiere a los valores indicados en la función cuadrática.

El resultado de estos cálculos nos proporcionan las coordenadas de los puntos de intersección.

Encontrádas las intersecciones con *x,* procedemos a calcular las coordenasdas del vértice de la parábola. Las coordenadas del vértice se identifican generalmente como V = (*h*,*k*) y se obtienen de la siguiente forma.

El valor de $h = \frac{-b}{2a}$ y para encontrar *k,* se sustituye el valor de *h* en la función original.

$k = f(h) = a(h)^2 + b(h) + c$

Hecho lo anterior, se procede a encontrar las coordenadas de los puntos de intersección con el eje de las *x's,* igualando la funcion a cero. Y por último, la interseccion con el eje *y* resolviendo *f(0),* es decir sustituyendo en la función original $x = 0$.

Ejemplo. Encuentre las intersecciones con los ejes y el vertice de la función.

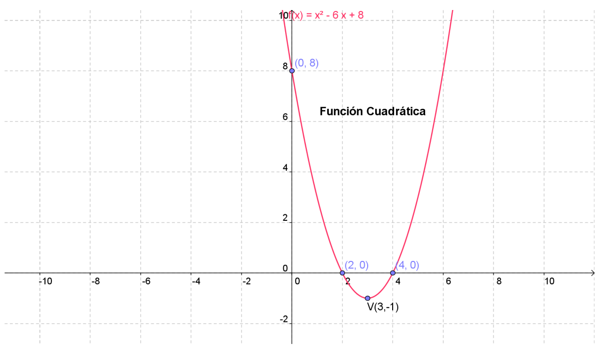
$f(x) = x^2 - 6x + 8$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ se iguala a cero para encontrar las intersecciones con *x.*

$(x - 4)(x - 2) = 0$ resolviendo para cada factor se obtiene

$x = 4, \ x = 2$

$f(0) = 0^2 - 6(0) + 8 = 8$ la interseccion con $y = 8$
El valor del Vertice:
$h = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$
$f(3) = 3^2 - 6(3) + 8 = -1 = k$
Las coordenadas de V(3,-1)

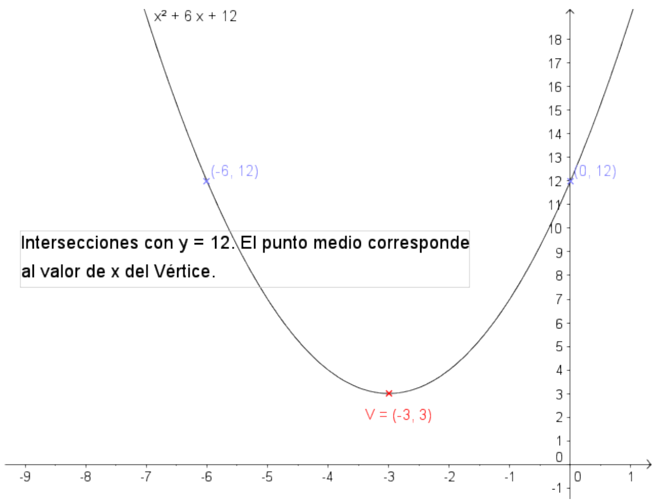


El tecer caso cuando el discriminante tiene valor negativo, se resuelve de la siguiente manera;

Encontramos los puntos donde la parabola intersecta el valor del término independiente c, de la siguiente manera:

Si tenemos la función.
$f(x) = x^2 + 6x + 12$ vemos que calculando el discriminante tenemos
$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(12)(1) = 36 - 48 = -12$ negativo
1er paso
Procedemos a encontrar los puntos donde la parábola intersecta el eje y
$x^2 + 6x + 12 = 12$ Cancelando
$x^2 + 6x + 12 + (-12) = 12 + (-12)$
$x^2 + 6x = 0$
$x(x + 6) = 0$ encontrando los valores
$x = 0 \quad y \quad x = -6$ que son los valores donde y = *12.*
2do paso
Procedemos a encontrar las coordenadas del Vértice.
$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$ el valor de k
$f(h) = (-3)^2 + 6(-3) + 12 = 9 - 18 + 12 = 3$
$V = (-3,\, 3)$

Vea la siguiente grafica en la que se muestran los puntos que acabamox de encontrar, ademas de que es posible observar como la parábola ni intersecta el eje de las *x's.*



4.2.1. Dominio y Rango de la Función Cuadrática

Dependiendo si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo, el vértice nos representa en valor mínimo o máximo respectivamente, lo que determina el valor del Rango. Es decir si el vértice es un mínimo el rango es $R_f = [h. \infty)$ y si es un máximo $R_f = (-\infty,\ h]$.

El valor del dominio en una función cuadrática y en general en cualquier función polinómica es $D_f = (-\infty,\ \infty)$.

4.3. Función Raíz.

De la función raíz vamos a trabajar con dos tipos.

Raíz Lineal

$f(x) = \sqrt{ax + b}$

Raíz Cuadrática

$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

4.3.1. Raíz Lineal

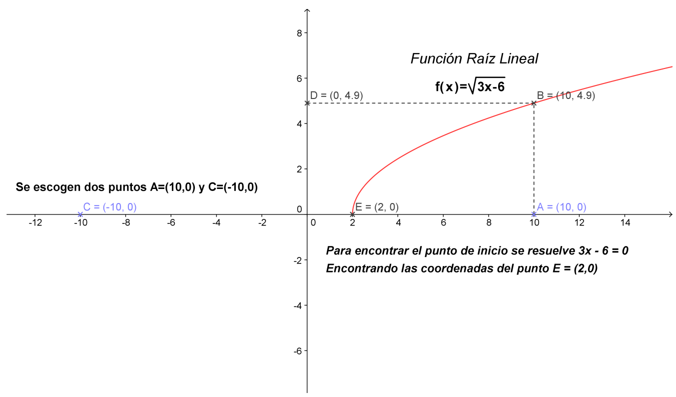
La raíz lineal como función se grafica como una media parábola y dependiendo del valor de a es como esta se abre, ya sea, hacia la derecha (a>*0*) o izquierda (a<0).

El punto de intersección con el eje x, lo obtenemos al resolver la expresión $ax + b = 0$, es decir $x = -\frac{b}{a}$. Despues tomaremos otros dos puntos uno a la derecha y otro a la izquierde del valor encontrado de x. Si el resultado es negativo, no tiene solución, ya que $\sqrt{-k}$ no es valida para la función, esto, de acuerdo a las propiedades de la Raíz Cuadrada. Si por el contrario el resultado de sustituir el punto escogido es positivo, se grafica y se supone que la función se continúa a lo largo del eje x, hasta el infinito.

Ejemplo.

Sea $f(x) = \sqrt{3x-6}$ al resolver para x $3x - 6 = 0$ encontramos que $x = 2$. Ahora escogemos dos puntos 10 y -10 y los sustituímos. $f(10) = \sqrt{3(10)-6} = \sqrt{24} = 4,9$ y $f(-10) = \sqrt{3(-10)-6} = \sqrt{-36}$ como se ve al sustituír el valor 10 positivo el resultado de la raíz es válido, no así para $x =$ -10.

Ver grafica siguiente.



4.3.2. Función Raíz Cuadrática

Diferente a la raíz lineal, la raíz cuadrática se grafica de dos formas, como una media hiperbola ($a > 0$).

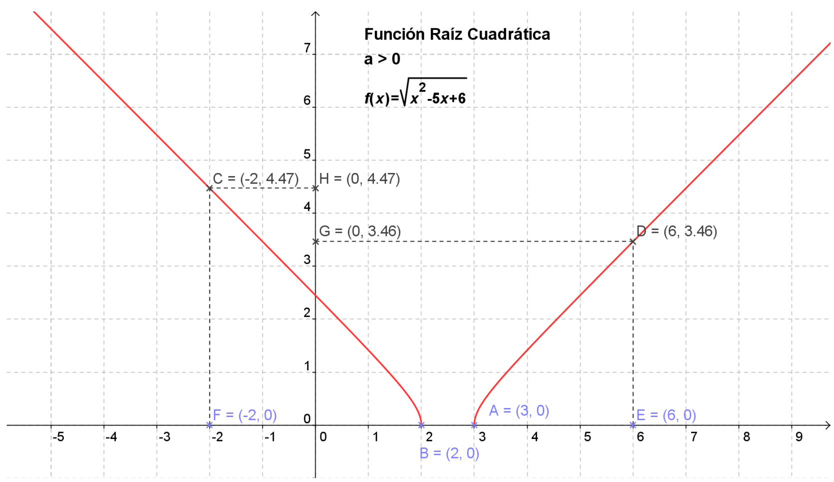
Para encontrar los valores de inicio resolvemos $ax^2 + bx + c = 0$ encontrando dos puntos que corresponden a las coordenadas de inicio de las hipérbolas. para identificar la tendencia de las gráficas tomaremos otros dos valores, uno mayor que el punto de inicio de la hipérbola que abre a la derecha y el otro menor que el punto de inicio de la hipérbola que abre hacia la izquierda.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ igualando a cero y encontrándo las raices tenemos

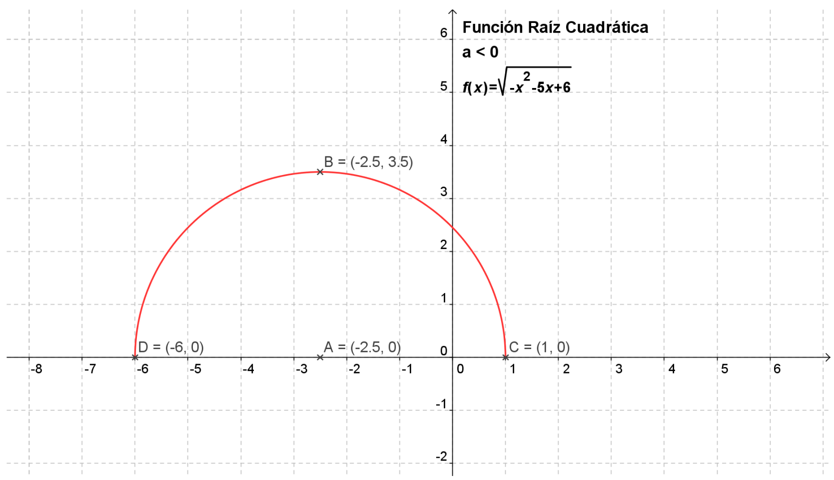
$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$ de donde se ve que los valores son $x = 3$ y $x = 2$. Que corresponden a las coordenadas de los puntos A y B de la gráfica. Se seleccionan otros dos puntos arbitrarios en este caso el punto $F = (6,\, 0)$ y el punto $G = (-2,\, 0)$ encontrando sus correspondientes ordenadas.

Con $x = 6$ tenemos $f(6) = \sqrt{6^2 - 5(6) + 6} = 3.46$ encontrando las coordenadas del punto $D = (6,\, 3, 46)$ y con $x = -2$ se obtiene $f(-2) = \sqrt{-2^2 - 5(-2) + 6} = 4.47$ que definen las coordenadas del punto $C = (-2,\, 4.47)$. como se pueden apreciar en la siguiente gráfica.



El otro caso cuando el valor de $a < 0$ nos da como resultado la gráfica de una media elipse con valor máximo a la mitad de las coordenadas de los puntos de inicio y termino de la misma. Para encontrar estos puntos procedemos de la misma forma que lo hicimos en el caso anterior, es decir resolvemos $-ax^2 + bx + c = 0$ encontrando las raíces y el punto medio como se mencionó anteriormente es el valor máximo de la misma.

Veamos un ejemplo.



Sea la función $f(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 6}$ resolviendo $-x^2 - 5x + 6 = 0 \Longrightarrow (x+6)(x-1) = 0$ de donde se obtienen las coordenadas de los puntos $C = (1, 0)$ y $D = (-6, 0)$ el valor medio de estos que puede encontrarse con la fórmula $h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2(-1)} = \frac{5}{-2} = -2.5$ encontrando la coordenada de $A = (-2.5, 0)$ correpondiente a un valor de y igual a $f(-2.5) = \sqrt{-2,5^2 - 5x + 6} = 3.5$ que proporciona la coordenada de $B = (-2.5, 3.5)$ con estos puntos trazamos una media elipse. Ver Grafica anterior.

4.3.3. Dominio y Rango de la Función Raíz

En el caso de la función raíz lineal, los valores de x para los que la función está definida dependen de la forma de la gráfica, si la media parábola abre hacia la derecha. el dominio incluye el valor $x = 2$ y todos los valores mayores que este, $D_f = [2, \infty)$ y el Rango los valores mayores que cero, $R_f = [0, \infty)$. En caso contrario, es decir, que la parábola abra hacia la izquierda, los valores del dominio incluyen al valor de inicio de la parábola y todos los menores a este. Suponiendo que el valor fuera $x =$ -1. El dominio será $D_f = (-\infty, -1]$ y el rango es similar al anterior $R_f = [0, \infty)$.

Para la función raíz cuadrática en la que el valor de $a > 0$, Donde las hipérbolas abren hacia afuera, vease la grafica del ejemplo. El dominio es $D_f = (-\infty, 2] \bigcup [3, \infty)$ y el rango es de $R_f = [0, \infty)$ y para la función raíz con $a < 0$ cuya gráfica es una media elipse, El valor del dominio es $D_f = [-6, 1]$ y el rango $R_f = [0, 3.5]$.

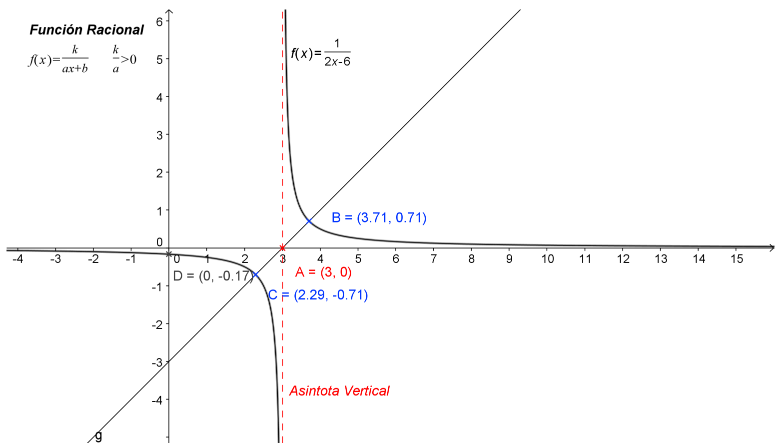
4.4. Función Racional.

Esta función es de la forma $f(x) = \frac{N(x)}{Q(x)}$ donde $Q(x) \neq 0$ y $N(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de cualquier grado. Para la graficación de éstos se hacen necesarios conceptos que se verán en el curso de Cálculo Diferencial.

En este curso propedéutico veremos solamente los casos donde el denominador es una constante k y el denominador es una función lineal o cuadratica.

4.4.1. Función Racional Lineal

Esta función $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ tiene dos casos especiales, El que $\frac{k}{a} > 0$ y $\frac{k}{a} < 0$.



La gráfica anterior corresponde al primer caso, para graficar esta función necesitamos encontrar en primer lugar el punto correspondiente a la asintota vertical.

Este punto es aquel en el que el denominador se hace cero por tanto para calcularlo, igualemos el denominador a cero y resolvamos para x.

Despues, hay que encontrar los vertices de la hipérbola; Para esto, trazamos la bisectriz entre las asisntotas vertical y horizontal, debido a que el angulo entre éstas es 90^0 la bisectriz, es una recta a 45^0, que pasa por el punto de intersección de las asintotas.

La ecuación de esta recta, la igualamos con la función original, y se resuelve para las x's. Estos puntos los sustituímos en la función original o en la ecuación de la recta y encontramos las ordenadas.

Por último podemos encontrar la interseccion con el eje y.

Veamos un ejemplo:

Sea la función $f(x) = \frac{1}{2x-6}$ la asintota vertical se encuentre en el punto donde;

$2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$ veamos la grafica y observemos que este punto correspondiente a $A = (3, 0)$

Despues obtenemos la ecuación de la recta bisectriz, es $y = x-3$ igualando las funciones para encontrar el punto de intersección

$\frac{1}{2x-6} = x - 3$ cancelando $x - 3$ tenemos

$\frac{1}{2z-6} - x + 3 = 0$ tomando denominador común

$\frac{1-x(2x-6)+3(2x-6)}{2x-6} = \frac{1-2x^2+6x+6x-18}{2x-6} = 0$ cancelando $2x - 6$ y multiplicando por (-1)

$2x^2 - 12x + 17 = 0$ usando la formula general encontramos que $x_1 = 2.29$ y $x_2 = 3.71$se sustituyen en

$y = x - 3 = 2.29 - 3 = -0.71$ obteniendose l punto $C = (2.29. - 0.71)$ el otro punto lo encontramos al sustituir

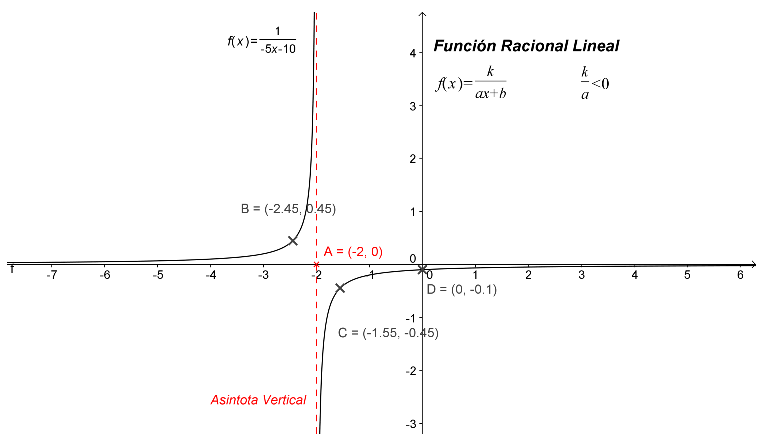
$y = 3.71 - 3 = 0.71$ lo que permite encontrar las coordenadas del punto $B = (3.71.0.71)$

La intersección con el eje y la encontrmos sustituyendo $x = 0$ en la función original.

$f(0) = \frac{1}{2(0)-6} = \frac{1}{-6} = -0.17$, encontando las coordenadas del punto $D = (0, -0.17)$

El segundo caso.

Se resuelve de manera similar pero al graficar se invierte la hipérbola.

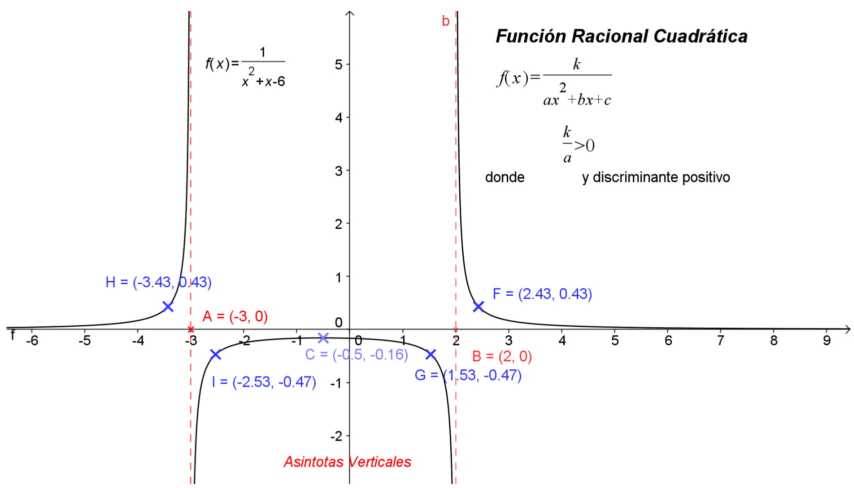


4.4.2. Función Racional Cuadrática

Son de la forma $f(x) = \frac{k}{ax^2+bx+c}$ se veran dos casos, similar a la racional lineal $\frac{k}{a} > 0$ y $\frac{k}{a} < 0$. otra condición es que el *discriminante* sea positivo en ambos casos..

El método de solución es similar al de la función racional lineal solo que, en éste tipo de funciones como el denominador es una función de segundo grado, se tienen dos raíces, por tanto son dos asintotas verticales.

Veamos la gráfica siguiente.



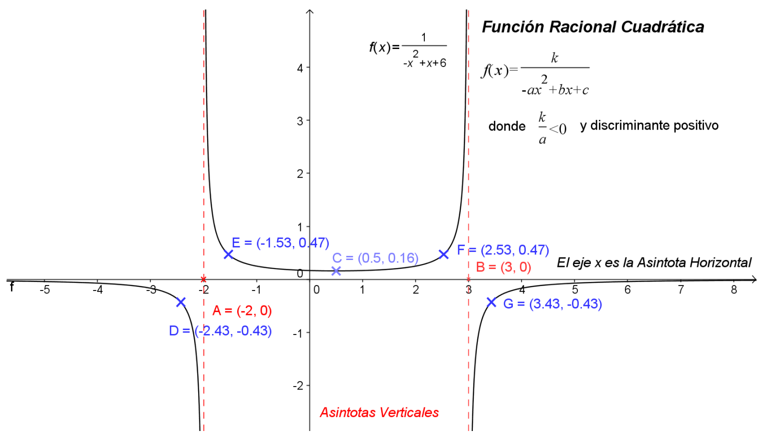
Tenemos que la función es $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$ al resolver el denominador se observa que los valores son $x = -3$ y $x = 2$, los que permiten encontral los puntos A *y* B que son los puntos en X donde cruzan las asintotas verticales. El punto medio de la parte cuadrática que es el máxio valoror, lo obtenemos calculando el punto medio entre los dos valores que obtuvimos o bien con la fórmula $x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} = -0.5$, la ordenada la obtenemos sustituyendo este valor en la función original.

$f(-0.5) = \frac{1}{-.5^2+.5-6} = -0.16$ por lo tanto $C = (-0.5, -0.16)$.

Debido a que encontrar los vértices puntos F, G, H *e* I. resulta en calculos muy complicados se deja como opcional.

El segundo caso donde $\frac{k}{a} < 0$ se resuelve de manera similar.

Veamos la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{-x^2+x+6}$



Los comentarios sobre esta grafica son similares a los de la anterior y los cálculos también.

4.4.3. Dominio y Rango de las funciones Racionales.

En las funciones racionales el dominio incluye todos los valorese de x excepto en los que la función es indeterminada. Y el rango se comporta de igual manera. Los valores donde la función es indeterminada es en los puntos donde encontramos absisas verticales. Para el rango los valores son todos excepto el que corresponte a la asintota horizontal.

De los ejemplos.

En primer caso $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, -\infty)$ y el rango $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

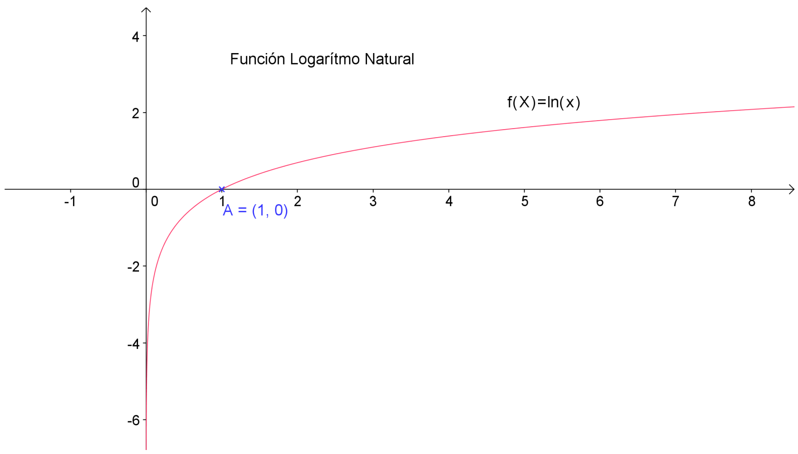
El segundo caso $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, el rango es similar al anterior.

El tercer caso $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$,el rango es similar al anterior.

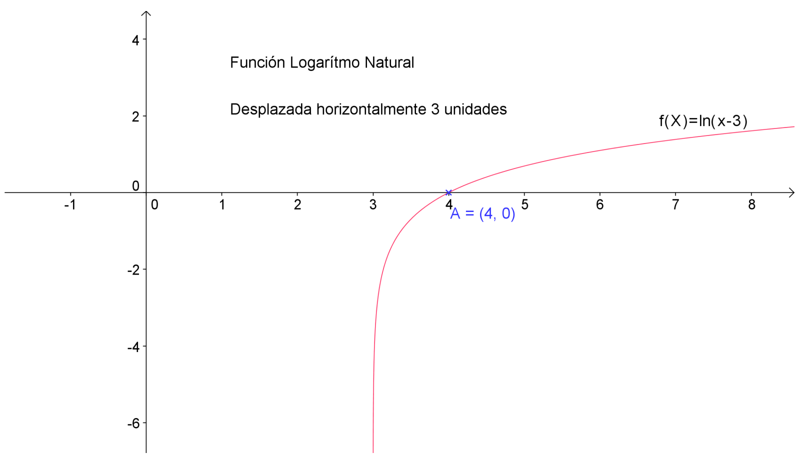
En el cuarto caso $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$ y el rango similar a los otros casos.

4.5. Función Logarítmo Natural

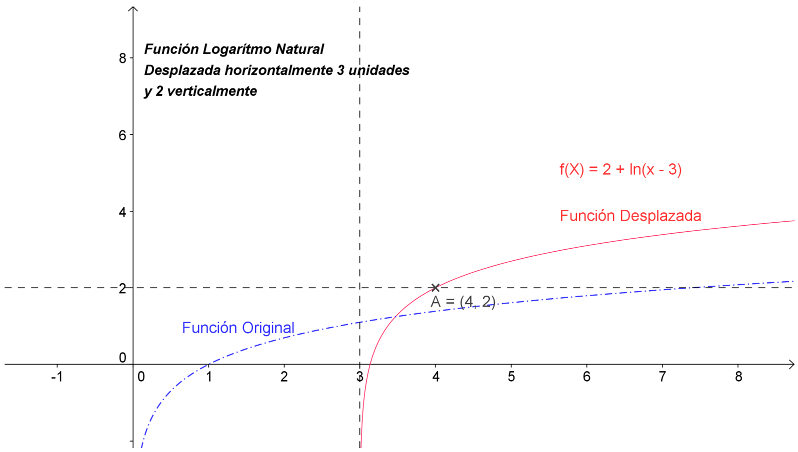
De la forma $f(x) = k + ln(x - p)$ donde k representa el desplazamiento vertical y p el desplazamiento horizontal. Tiene como caso mas simple cuando $k = p = 0$ es decir, $f(x) = ln(x)$ y cuyo dominio es $D_f = (0, \infty)$ y que el valor para $x = 1$ es $ln(1) = 0$ tiene una gráfica como la siguiente:



La siguiente gráfica nos muestra la función desplazada horizontalmente a la derecha en tres unidades, la ecuación es $f(x) = ln(x-3)$, en esta el dominio es $D_f = (3, \infty)$

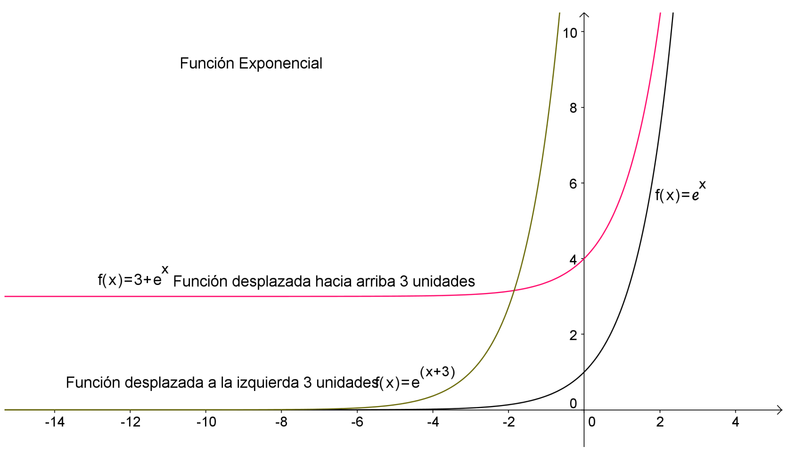


Por último veamos la misma gráfica pero ademas de las 3 unidades desplazadas horizontalmente tenemos 2 unidades desplazadas verticalmente hacia arriba. La ecuación de la función es $f(x) = 2 + ln(x-3)$.



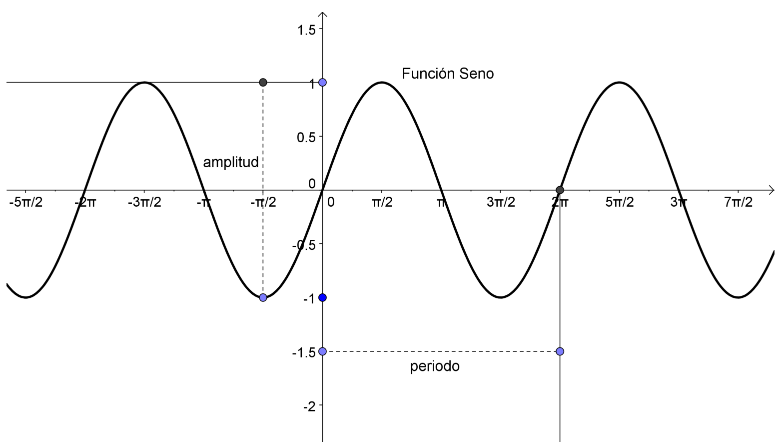
4.6. Función Exponencial

De la forma $f(x) = k + e^{(x+p)}$ que de igual manera que en la función logarítmo, la k representa un desplazamiento vertical, hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$ y $p > 0$ un desplazamiento horizontal a la izquierda y a la derecha si $k < 0$; El dominio de la función exponencial es $D_f = (-\infty, \infty)$ y el rango es de $R_f = (0, \infty)$. Veamos las siguientes gráficas.



4.7. Funciones Trigonométricas.

Dentro de las funciones trigonométricas veremos únicamente la función seno, $f(x) = sen(x)$, cuyos valores están asociados al circulo trigonométrico que se discutira en capitulos posteriores. Por el momento lo importante es reconocerla y remarcar que el dominio de la función es de $D_f = (-\infty, \infty)$ con un comportamiento periódico, es decir, que los valores se repiten en intervalos de 0 a 2π y que el rango, denominado amplitud oscila entre $R_f = [-1, 1]$, ver la gráfica siguiente.



5. Lógica y Razonamiento

5.1. Inferencia

5.2. Deducción

5.3. Comprobación o justificación

5.4. Estrategias de prueba o demostración

5.4.1. Directa

5.4.2. Contrapositiva

5.4.3. Análisis regresivo

5.4.4. Negación

5.4.5. Método exhaustivo

6. Resolución de Problemas

6.1. Diagramas y modelos

6.2. Variación directa e inversa

6.3. Movimiento lineal con velocidad constante

6.4. Mezclas

6.5. Problemas geométricos

Referencias

[1] Bishop, A. J. (1999) *Enculturación matemática*: La educación matemática desde una perspectiva cultural. Paidós

[2] Mason, J. et al. (1985) *Thinking Mathematically*, Revised Edition. Addison-Wesley